Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

61e jaargang
1985 | 1986
oktober

# Euclides 2

Wolters-Noordhoff

# Euclides



Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

**Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren**

*Voorzitter* Dr Th. J. Korthagen, Torenlaan 12, 7231 CB Warnsveld, tel. 05750-2 34 17.
*Secretaris* Drs J. W. Maassen, Traviatastraat 132, 2555 VJ Den Haag.
*Penningmeester en ledenadministratie* F. F. J. Gaillard, Jorisstraat 43, 4834 VC Breda, tel. 076-65 32 18. Giro: 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.

De contributie bedraagt *f* 50,– per verenigingsjaar; studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de V.V.W.L. *f* 35,–; contributie zonder Euclides *f* 30,–. Adreswijziging en opgave van nieuwe leden (met vermelding van evt. gironummer) aan de penningmeester. Opzeggingen vóór 1 juli.

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij Drs F. H. Dolmans, Heiveldweg 6, 6603 KR Wijchen, tel. 08894-1 17 30. Zij dienen met de machine geschreven te zijn met een marge van 5 cm en een regelafstand van $1\frac{1}{2}$. De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 5 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Boeken ter recensie aan Drs W. Kleijne, Treverilaan 39, 7312 HB Apeldoorn, tel. 055-55 08 34.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan F. J. M. Doove, Severij 5, 3155 BR Maasland. Giro: 1609994 t.n.v. NVvW leesportefeuille te Maasland.

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 42,40. Een collectief abonnement (6 ex. of meer) kost per abonnement *f* 24,65. Niet-leden kunnen zich abonneren bij: Wolters-Noordhoff bv, afd. periodieken, Postbus 567, 9700 AN Groningen, tel. 050-22 68 86. Giro: 1308949. Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgirokaart hebben ontvangen. Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer. Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar na vooruitbetaling van het verschuldigde bedrag. Annuleringen dienen minstens één maand voor het einde van de jaargang te worden doorgegeven. Losse nummers *f* 7,– (alleen verkrijgbaar na vooruitbetaling).



ISSN 01.65-0394

# Het Tweede Wiskunde Project van de IEA

*P. G. J. Vredenduin*

Onze hoofdredacteur, Frans Dolmans, heeft me verzocht op basis van de binnengekomen kopij dit nummer van Euclides samen te stellen. Hij was er niet zeker van dat bundeling van de ontvangen artikelen een bevredigend geheel zou opleveren en vroeg me dit kritisch te bekijken. Nu was ik van het Tweede Wiskunde Project niet op de hoogte en was daardoor juist goed in staat te beoordelen of de artikelen voor niet ingewijden de gewenste informatie zouden bieden. Mijn bevindingen waren negatief. Ik had de behoefte eerst meer van het project te weten te komen. Eerst daarna zouden de artikelen goed leesbaar voor me worden. Ik heb toen besloten zelf in het project te duiken, er die informatie uit te halen die mij ontbrak en die in een inleidend artikel samen te vatten.
Dit als excuus voor het feit dat ik als outsider deze inleiding schrijf.

## Doel en opzet van het project

De International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA) heeft als doel empirisch onderzoek te doen naar de stand van zaken van het onderwijs in de deelnemende landen. Het aantal landen dat lid is van de IEA, bedraagt 32. Een van de projecten die door de IEA uitgevoerd is, is het Tweede Wiskunde Project (TWP). In Nederland werd hieraan meegewerkt gedurende de periode 1978-1983. De afdeling Toegepaste Onderwijskunde van de TH-Twente heeft hierbij de centrale rol gespeeld. SVO heeft het onderzoek betaald.
Doel van het TWP was een onderzoek te doen naar het wiskunde-onderwijs aan dertienjarigen. Of, om het nauwkeuriger te zeggen, aan die klasse van leerlingen waarin in het midden van het schooljaar de dertienjarigen het sterkst vertegenwoordigd zijn.
In Nederland blijkt dat de tweede klasse te zijn van het voortgezet onderwijs. Op 1 januari 1977 waren de percentages leerlingen van de verschillende leeftijdsklassen in de tweede klasse:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| leeftijd | 12 | 13 | 14 | overige |
| percentage | 0,2 | 45,2 | 39,0 | 15,5 |

Het onderzoek heeft betrekking gehad op alle leerlingen uit deze klassen, voorzover ze niet vallen onder het buitengewoon onderwijs. Tot het buitengewoon onderwijs is ook gerekend het individueel lbo.
Vier categorieën zijn daarbij onderscheiden:
1 vwo-havo
2 mavo
3 lto
4 lhno
Buiten beschouwing zijn dus gelaten de leerlingen van het leao, llo, lmo, lno.
De aantallen leerlingen in deze vier categorieën bedroegen:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| categorie | 1 | 2 | 3 | 4 |
| aantal | 69832 | 91897 | 31442 | 25481 |

Uit deze leerlingen is een steekproef genomen zo, dat de aantallen leerlingen in de steekproef zoveel mogelijk evenredig zijn met bovenstaande aantallen. De steekproef is zo genomen dat alleen gehele klassen hebben deelgenomen.
Omdat men op verantwoorde wijze de verschillende onderwijssoorten wilde vergelijken en de categorieën 3 en 4 relatief minder vertegenwoordigd waren dan de categorieën 1 en 2, heeft men besloten uit het lto en uit het lhno tweemaal zoveel leerlingen te kiezen als op grond van evenredige vertegenwoordiging het geval zou moeten zijn. De aantallen leerlingen in de steekproef waren:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| categorie | 1 | 2 | 3 | 4 |
| aantal | 1515 | 1718 | 1276 | 991 |

Er zijn tal van vragen gesteld aan leerlingen, leraren en schoolleiding. Ik laat ze op een zodanige wijze de revue passeren dat men een indruk krijgt over de aard van de vragen.

## Multiple choice leerlingentest

Om de stand van kennis van de leerlingen vast te stellen, zijn vijf toetsen samengesteld: een kerntoets die bestaat uit 40 items en verder een toets A, B, C en D, elk bestaande uit 34 items. Bij elk item heeft men de keuze uit vijf antwoorden, waarvan er precies één goed is.
De kerntoets werd gemaakt door alle leerlingen. Verder werd door elke leerling één van de overige vier toetsen gemaakt. Deze werden at random over de leerlingen verdeeld, zo dat elk van de vier toetsen door evenveel leerlingen gemaakt werd.
Door vijf toetsen samen te stellen, was men in staat een groot aantal onderwerpen uit te testen. Door alle leerlingen slechts twee van de vijf toetsen te laten maken, werd overbelasting voorkomen.
De toetsen zijn samengesteld in overleg met de deelnemende landen. Daartoe is de volgende procedure gevolgd. Eerst is een lijst met onderwerpen samengesteld verdeeld over vijf categorieën:

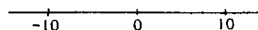
| *categorie* | *enkele voorbeelden van onderwerpen uit die categorie* |
|---|---|
| rekenen | gewone breuken, decimale breuken, verhoudingen, percenten, vierkantswortels |
| algebra | machten met gehele exponenten, eerstegraads vergelijkingen en ongelijkheden, relaties en functies, reële getallen |
| meetkunde | congruentie, symmetrie, constructies, coördinaten, eenvoudige deducties, lichamen, oriëntatie |
| statistiek | rangschikken van data, gemiddelde, mediaan, modus, combinatoriek |
| meten | standaardeenheden, schatten, benaderen, meten van oppervlakten en inhouden |

De onderwerpen werden de verschillende landen voorgelegd. Elk land deelde mee of men het onderwerp zeer belangrijk, belangrijk of onbelangrijk vond. Op grond daarvan werden de onderwerpen verdeeld in vier soorten:
zeer belangrijk
belangrijk
volgens sommige landen belangrijk
onbelangrijk
Uit deze vier soorten werden items gekozen in de verhouding 6 : 4 : 1 : 0.
Men ging daarbij als volgt te werk:

1 vanuit het internationale centrum werden items voorgesteld;
2 commentaar werd door de diverse landen geleverd;
3 op basis van dit commentaar werd een nieuwe versie gemaakt;
4 deze werd uitgetest in de verschillende landen;
5 op grond van de resultaten werd een laatste voorstel samengesteld;
6 hierop werd nogmaals commentaar geleverd;
7 daarna volgde de definitieve vaststelling.

Om enig inzicht te krijgen in de aard van de items volgt er hier een aantal. Ze zijn alle gekozen uit de kerntoets. Tussen haakjes zijn de gemiddelde p-waarden (percentage goede antwoorden) toegevoegd. De vier getallen hebben resp. betrekking op vwo-havo, mavo, lto, lhno. In de artikelen van Broekman en Weterings en van Schuring vindt men nog meer items uit de kerntoets.

(1)




In welk van de volgende rijtjes staan de getallen in de volgorde waarin ze van links naar rechts op de getallenlijn voorkomen?

A. $0, \frac{1}{2}, -1$
B. $0, -1, \frac{1}{2}$
C. $-1, -\frac{1}{2}, 0$
D. $-1, 0, -\frac{1}{2}$
E. $-\frac{1}{2}, -1, 0$

(97, 91, 76, 68)

(3)

Alexandra liep van Rivierstad naar Brugdorp, die op een afstand van 3,1 kilometer van elkaar liggen. Onderweg verloor zij haar horloge en ging 1,7 kilometer terug tot ze het vond. Daarna ging ze in de oorspronkelijke richting verder tot zij Brugdorp bereikte.
Hoeveel kilometer had Alexandra in totaal gelopen toen ze in Brugdorp aankwam?

A. 1,4

B. 4,8

C. 6,5

D. 8,2 (77, 59, 56, 41)

E. Geen van bovenstaande antwoorden.

(4)

(-2) × (-3) is gelijk aan

A. -6

B. -5

C. -1

D. 5 (94, 83, 46, 15)

E. 6

(5)

In welk van de onderstaande antwoorden is de tweede figuur het beeld van de eerste figuur, ontstaan door een lijnspiegeling?

A.

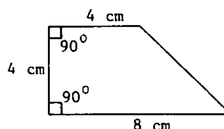
B.

C.

D. (93, 87, 83, 85)

E.

(8)




Een koperen plaat heeft de vorm en afmetingen zoals in de figuur hierboven aangegeven.
Hoe groot is de oppervlakte in vierkante centimeters?

A. 16

B. 24

C. 32

D. 64 (67, 46, 43, 25)

E. 96

(11)

Wat is de inhoud van een rechthoekig kistje met binnenmaten van 10 cm lang, 10 cm breed en 7 cm hoog?

A. 27 $cm^3$

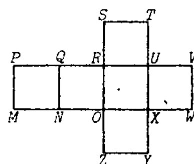
B. 70 $cm^3$

C. 140 $cm^3$

D. 280 $cm^3$ (98, 90, 80, 48)

E. 700 $cm^3$

(13)




De figuur stelt een kubus voor gemaakt van karton, die langs enkele ribben losgesneden en plat uitgevouwen is.
Als je hem weer tot een kubus vouwt, welke twee hoekpunten zullen dan samenvallen met hoekpunt $P$?

A. hoekpunten $Q$ en $S$

B. hoekpunten $T$ en $Y$

C. hoekpunten $W$ en $Y$

D. hoekpunten $T$ en $V$ (93, 82, 76, 63)

E. hoekpunten $U$ en $Y$

(16)

$Q = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$

$R = \{ 3, 5, 7, 9, 11, 13 \}$

$S = Q \cap R$

De verzameling $Q$ heeft 9 elementen en de verzameling $R$ heeft er 6. Hoeveel elementen heeft de verzameling $S$?

A. 16

B. 11

C. 7

D. 4

E. 2

(82, 53, 36, 25)

(19)

Op een vlak terrein heeft een jongen van 5 eenheden groot een schaduw van 3 eenheden lang.
Hoe lang zal, in dezelfde eenheden, tegelijkertijd de schaduw zijn van een nabij gelegen telefoonpaal van 45 eenheden groot?

A. 24

B. 27

C. 30

D. 60

E. 75

(82, 58, 46, 26)

(25)

Limonade kost $a$ cent per fles, inclusief statiegeld. Voor elke fles krijgt men $b$ cent terug.
Hoeveel cent moet Henry voor $x$ flessen betalen als hij $y$ lege flessen inlevert?

A. $ax + by$

B. $ax - by$

C. $(a - b)x$

D. $(a - x) - (b + y)$

E. Geen van bovenstaande antwoorden.

(69, 46, 31, 22)

(27)

'let gemiddelde van: 1,50; 2,40 en 3,75 is gelijk aan

A. 2,40

B. 2,55

C. 3,75

D. 7,65

E. Geen van bovenstaande antwoorden.

(77, 58, 40, 29)

(28)

Een vierhoek is ZEKER een parallellogram als

A. twee aanliggende zijden gelijk zijn

B. twee zijden evenwijdig zijn

C. een diagonaal een symmetrie-as is

D. twee opeenvolgende hoeken gelijk zijn

E. er twee paar evenwijdige zijden zijn

(55, 33, 34, 25)

(29)

Eén van de volgende punten kan verbonden worden met het punt (-3,4) door een lijnstuk, dat NOCH de $x$-as NOCH de $y$-as snijdt.
Welk punt is dat?

A. (-2,3)

B. (2,-3)

C. (2,3)

D. (-2,-3)

E. (4,-3)

(76, 48, 28, 17)

(33)

30 is 75% van

A. 40

B. 90

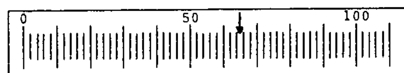
C. 105

D. 225

E. 2250

(84, 55, 41, 23)

(37)




De waarde die de pijl aanwijst op bovenstaande schaal ligt tussen

A. 51 en 52

B. 57 en 58

C. 60 en 62

D. 62 en 64

E. 64 en 66

(68, 39, 27, 13)

*Tabel 1: Percentages correct per schooltype op subtoetsen en totaal*

| | | *Schooltype* | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | *havo/vwo* | *mavo* | *lto* | *lhno* |
| | *Aantal* | % | % | % | % |
| *Onderwerp* | *opgaven* | *(n = 1400)* | *(n = 1682)* | *(n = 1248)* | *(n = 967)* |
| Rekenen | 19 à 21 | 80 | 61 | 47 | 35 |
| Algebra | 16 à 18 | 79 | 58 | 40 | 30 |
| Meetkunde | 19 à 21 | 74 | 55 | 45 | 33 |
| Statistiek | 7 à 8 | 85 | 73 | 61 | 54 |
| Meten | 9 à 10 | 79 | 61 | 54 | 39 |
| Totaal | 74 | 78 | 60 | 47 | 36 |

Hans Pelgrum en Tjeerd Plomp hebben in hun artikel 'Nederlands wiskunde-onderwijs staat op hoog peil', gepubliceerd in Didactief, april 1985, blz. 9-11, iets over de resultaten meegedeeld.
In tabel 1 hebben ze de resultaten vergeleken die door de leerlingen van de vier schoolsoorten behaald zijn.

Toelichting. Zoals reeds vermeld, zijn door elke leerling de items van de kerntoets en van één van de toetsen A, B, C en D gemaakt, dus in totaal 74 items. Het aantal items voor rekenen kan daarbij variëren van 19 tot 21, dat voor algebra van 16 tot 18 enz.
In tabel 2 zijn de resultaten vergeleken die behaald zijn in zes landen.

*Tabel 2: Percentage correct per onderwerp per land. (n = aantal items)*

| *Land.* | *Rekenen* *n = 42* | *Algebra* *n = 29* | *Meetkunde* *n = 38* | *Statistiek* *n = 18* | *Meten* *n = 23* | *Totaal* *n = 150* |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Nederland | 59 | 53 | 53 | 66 | 62 | 58 |
| Engeland | 47 | 40 | 44 | 59 | 47 | 46 |
| Zweden | 44 | 34 | 40 | 58 | 50 | 46 |
| Japan | 62 | 61 | 57 | 69 | 68 | 62 |
| USA | 51 | 43 | 38 | 56 | 40 | 45 |
| Israël | 51 | 47 | 36 | 52 | 45 | 46 |

Hier staat Nederland duidelijk op de tweede plaats, achter Japan. De auteurs vermelden verder:
We hebben de Nederlandse resultaten op itemniveau ook vergeleken met alle andere aan het onderzoek deelnemende landen, daarbij rekening houdend met het feitelijk leerstofaanbod. Daarvoor namen we die items waarvan zowel in ons land als in andere landen veel onderwijs is gegeven. Uit die vergelijking bleek dat er geen items te vinden zijn waarop de Nederlandse leerlingen beduidend lager scoren dan leerlingen uit het buitenland.

Voor wie ernaar nieuwsgierig is, volgt hier een lijst met de 24 landen die aan het TWP deelgenomen hebben.

| | | |
|---|---|---|
| Australië | Hongkong | Nieuw Zeeland |
| België | Ierland | Nigeria |
| Canada | Israël | Schotland |
| Chili | Ivoorkust | Spanje |
| Engeland | Japan | Swaziland |
| Finland | Korea | Thailand |
| Frankrijk | Luxemburg | Verenigde Staten |
| Hongarije | Nederland | Zweden |

## Vragenlijsten

*De leerlingenvragenlijst*

Deze lijst bestaat uit drie onderdelen.

A Geïnformeerd wordt naar de sociale achtergronden van de leerling. Welk beroep oefent de vader uit, welke opleiding heeft hij genoten? Dezelfde vragen over de moeder.
Dan volgt een serie vragen die betrekking hebben op de attitude van de leerling: neem je wiskunde in je examenpakket?, hoeveel tijd besteed je aan je wiskunde-huiswerk? e.d.

B Dit onderdeel bestaat uit 15 vragen. Er wordt gevraagd hoe belangrijk, hoe moeilijk en hoe leuk de leerling een serie onderwerpen vindt. Ter oriëntatie volgen er hier een paar.
17 Uit je hoofd leren van regels en formules.
19 Oplossen van tekstopgaven.
24 Lessen over verhoudingen en evenredigheden.
26 Werken met verzamelingen.
28 Tekenen van meetkundige figuren.
29 Informatie halen uit statistieken.

C Ten slotte nog een serie van 54 vragen waarin de leerlingen gevraagd wordt in welke mate ze het met bepaalde beweringen eens zijn. De beweringen hebben uiteraard betrekking op wiskunde, maar nu in algemene zin. Weer enkele voorbeelden:
32 Ik kan me in het dagelijks leven best redden zonder gebruik te maken van wiskunde.
33 Meestal begrijp ik wel waar het over gaat in de wiskundeles.
37 Ik zou later graag een baan hebben waarin ik wiskunde moet gebruiken.
50 Ik word zenuwachtig van wiskundelessen.
59 Bij wiskunde moet je erg veel uit je hoofd leren.
65 Ook al doe ik nog zo mijn best, ik word toch nooit goed in wiskunde.
74 Jongens hebben meer aanleg voor wiskunde dan meisjes.
82 Als ik mocht kiezen, zou ik geen wiskunde meer volgen.

*De lerarenvragenlijst*

Ook deze bestaat uit drie onderdelen.

A Dit onderdeel bestaat in hoofdzaak uit vragen die betrekking hebben op feitelijke omstandigheden, zoals: bevoegdheid, indeling lessen, oordeel over de klas, gebruik van zakrekenmachine, tijd besteed aan verschillende onderwerpen, gebruikte boeken en hulpmiddelen.

B Een serie van 15 vragen waarin gevraagd wordt hoe belangrijk, hoe moeilijk en hoe leuk de leraar een serie onderwerpen vindt. Deze 15 onderwerpen zijn gelijkluidend aan de 15 onderwerpen uit deel B van de leerlingenvragenlijst.

C Een serie van 15 vragen waarin de leraar gevraagd wordt in welke mate hij het met bepaalde beweringen eens is. De vragen zijn gekozen uit de 54 vragen uit deel C van de leerlingenvragenlijst. Hier volgen er enkele.
46 Door wiskunde leer je logisch denken.
48 Er is altijd wel een regel die je kunt gebruiken om een wiskundevraagstuk op te lossen.
49 Met steeds weer proberen kun je vaak wiskundevraagstukken oplossen.
53 Door wiskunde leer je om volgens vaste regels te denken.
58 Er worden voortdurend nieuwe ontdekkingen gedaan in de wiskunde.

Er zijn geen beweringen opgenomen betreffende het verschil tussen jongens en meisjes.

*De schoolvragenlijst*

Deze bestaat uit twee delen.

A Dit deel betreft de schoolorganisatie en moet ingevuld worden door de directie.

B Enkele vragen worden gesteld betreffende de organisatie van de wiskundesectie en over het beleid van deze sectie t.a.v. het gebruik van zakrekenmachine (met alleen $+$, $-$, $\times$, $:$ en eventueel $\%$-toets) en wetenschappelijke zakrekenmachine (met bijv. sin, cos en $\sqrt{}$-toets). In te vullen door het hoofd van de sectie wiskunde.

*Gelegenheid om te leren*

In deze vragenlijst moet de leraar van elk item opgeven:

- hoe groot hij het percentage leerlingen van zijn klas schat dat het goede antwoord zal kiezen
- of de leerstof waarop het item betrekking heeft gedurende het leerjaar reeds behandeld is en wanneer het vroeger of later behandeld wordt (basisschool, brugklas, later in dit leerjaar, in een hoger leerjaar).

Solberg en ook Schuring gaan in hun artikelen in op de conclusies die men uit de antwoorden kan trekken.

## Het meetkundeproject

De IEA heeft bovendien nog een aantal facultatieve onderwerpen gekozen en hierover vragenlijsten samengesteld. Als een land dat wilde kon het aan zo'n onderwerp deelnemen. Nederland heeft gekozen voor deelname aan het meetkunde-project. De internationale vragenlijst is enigszins aangepast aan de Nederlandse situatie. De meetkunde-vragenlijst moest door de leraren beantwoord worden. De lijst bestaat uit vijf onderdelen.

I *Instructiematerialen*

Welk instructiemateriaal gebruikt u: leerboek, stencils, IOWO-pakketjes, Teleac-cursussen, films, dia's, video?

Wordt klassikaal, in groepen of individueel gewerkt?

II *Hulpmiddelen*

Welke hulpmiddelen gebruikt u bij het onderwijs, frequent of niet? Bijv. geodriehoek, ruitjespapier, bouwplaten, modellen van ruimtelijke figuren, spijkerbord.

III *Onderwerpen*

Van verschillende onderwerpen wordt gevraagd of ze dit cursusjaar behandeld worden, vroeger al behandeld zijn en zo ja of ze dit jaar herhaald of uitgebreid worden, of dat ze nog niet behandeld worden. Voorts hoeveel lesuren eraan besteed worden. Enkele van die onderwerpen zijn: translaties, som hoeken van een driehoek, stelling van Pythagoras, congruentie van driehoeken, gelijkvormigheid van driehoeken.

IV *Behandelingswijzen*

Gevraagd wordt op welke wijze de volgende onderwerpen behandeld worden: translaties, som van de hoeken van een driehoek, congruentie van driehoeken, gelijkvormigheid van driehoeken, evenwijdige lijnen. Bij elk onderwerp worden enkele behandelingswijzen genoemd. De leraar moet aangeven welke behandelingswijze door hem gekozen is.

Bij translatie bijv. heeft hij de keuze tussen:

- intuïtief aan de hand van concrete voorbeelden
- aan de hand van tekenvoorbeelden bijv. op het bord of op roosterpapier
- als samenstelling van twee puntspiegelingen
- als samenstelling van twee lijnspiegelingen
- als afbeelding door $x' = x + a$ en $y' = y + b$
- een andere nader te omschrijven methode.

V *Uw mening*

Tot slot 15 vragen waarbij men moet opgeven in welke mate men het ermee eens is (zoals bij de lerarenvragenlijst onder C). Enkele voorbeelden:

90 Een intuïtieve benadering heeft meer betekenis voor leerlingen uit de onderzoekklas dan een formele benadering.

91 Aan de leerlingen van de onderzoekklas dient meetkunde vooral aan de hand van transformaties (spiegelen, draaien, verschuiven, vermenigvuldigen) te worden onderwezen.

96 De behandeling van vectoren dient bij voorkeur uitgesteld te worden tot latere leerjaren.

97 In het onderwijsprogramma van de eerste twee leerjaren dienen activiteiten opgenomen te worden, die tot doel hebben dat het ruimtelijk inzicht bij de leerlingen vergroot wordt.

99 De leerlingen in de onderzoekklas moeten geoefend worden in het uitvoeren van constructies met passer en liniaal.

110 De behandeling van de bewijzen van stellingen moet een wezenlijk onderdeel zijn van het meetkunde-onderwijs voor deze leerlingen.

102 Bewijzen van stellingen dienen pas behandeld te worden als de leerlingen minstens 15 jaar oud zijn.

Het meetkunde-project wordt kritisch bekeken in het artikel van Agnes Verweij.

## Resultaten

De resultaten zijn opgeslagen in computerbestanden. Deze bevatten een schat van informatie waarover men op elk moment en in elke vorm kan beschikken.
Een overzicht over alle vragen en tevens over alle gegeven antwoorden vindt men in:
Tweede Wiskunde Project, Bijlagen, Technische Hogeschool Twente, Toegepaste Onderwijskunde.
Dit rapport kan men bestellen bij de T.H.-Twente, Onderafdeling Toegepaste Onderwijskunde, t.a.v. mevrouw Z. M. Bouman, postbus 217,
7500 AE · Enschede.
Op dezelfde manier kan men ook de andere rapporten uit de onderstaande literatuurlijst bestellen die door de T.H.-Twente uitgebracht zijn.

## Literatuur

(opgesteld door W. J. Pelgrum, Th. J. H. M. Eggen en Tj. Plomp:


Husén, *International study of achievement in Mathematics*, Almquist & Wuksell/Gebers Forlag, Stockholm, 1967

Kuper, J. en Pelgrum, W. J., *Tweede Wiskunde Project: Aspecten van Meetkunde-onderwijs*, T.H.-Twente, Onderafdeling der Toegepaste Onderwijskunde, Enschede, 1983

Pelgrum, W. J., Eggen, Th. J. H. M. en Plomp, Tj., *Kwaliteit en bruikbaarheid van 'opportunity to learn'-instrumenten in survey onderzoek*, in G. de Zeeuw, W. Hofstee en J. Vastenhouw (redactie), Funderend onderzoek van het onderwijs en onderwijsleerprocessen, Swets & Zeitlinger, Lisse, 1983

Pelgrum, W. J. en Eggen, Th. J. H. M., *Tweede Wiskunde Project: Opzet en Uitvoering*, T.H.-Twente, Onderafdeling der Toegepaste Onderwijskunde, Enschede, 1983

Pelgrum, W. J., Eggen, Th. J. H. M. en Plomp, Tj., *Tweede Wiskunde Project: Beschrijving van Uitkomsten*, T.H.-Twente, Onderafdeling der Toegepaste Onderwijskunde, Enschede, 1983

Pelgrum, W. J., Eggen, Th. J. H. M. en Plomp, Tj., *Tweede Wiskunde Project: Analyses van Uitkomsten*, T.H.-Twente, Onderafdeling der Toegepaste Onderwijskunde, Enschede, 1983

Steiner, H. G. e.a., *Comparative studies of mathematics curricula – change and stability 1960-1980*, Institut der Mathematik, Bielefeld, 1980

Wiegersma, S. en Groen, M., *Resultaten van wiskunde onderwijs*, Wolters-Noordhoff, Groningen, 1978


# Mededeling

## Vrouwen en wiskunde

Op zaterdag 28 september wordt de achtste landelijke dag van de werkgroep 'vrouwen en wiskunde' gehouden in het gebouw CUNERA Nieuwe Gracht 32, Utrecht.
De dag begint om 10.00 uur en eindigt om 16.00 uur. 's Morgens zal de discussie – wiskunde in de toekomst (verplicht?) – voortgezet worden.
Voor verdere informatie: Nora Blom, tel. 020-92 74 16.

# Enige resultaten van het Tweede Wiskunde Project

*H. N. Schuring*

Als er sprake is van een Tweede Wiskunde Project betekent het dat er ook een Eerste Wiskunde Project geweest moet zijn.
Dit is inderdaad het geval en Nederland heeft hierin ook geparticipeerd, samen met 11 andere landen. Het eerste wiskunde onderzoek is in 1963 gehouden. Het Nederlandse rapport, getiteld 'Resultaten van wiskundeonderwijs', kwam in 1968 uit als no 8 van de serie Empirische studies over onderwijs.
Dit rapport heeft weinig belangstelling gekregen in het wiskunde onderwijsveld. Er zijn enige oorzaken voor te noemen:

- In hetzelfde jaar, 1968, kwam de Mammoet-wet in werking. De scholen werden geconfronteerd met een totaal nieuw onderwijssysteem, met veel veranderingen, zoals de instelling van een brugklas, de nieuwe havo-opleiding, het verdwijnen van de mulo en hbs die plaats moesten maken voor mavo en atheneum, etc.
  Bovendien werd het wiskunde programma ook geheel herzien, zodat de wiskundedocenten meer belangstelling hadden voor de nieuwe leerstof dan voor een evaluatie van het wiskunde onderwijs in het oude systeem en programma.
- De organisatie van het onderzoek was in handen van onderwijskundigen omdat het belangrijkste doel een internationale vergelijking van onderwijssystemen was. Men heeft als middel een wiskundetoets gekozen, omdat men dacht dat er weinig verschillen in de programma's van de verschillende landen zouden zijn en er niet veel vertaalproblemen zouden optreden.

Toen er in 1977 sprake was van een Tweede Wiskunde Project waren de Nederlandse wiskundigen niet enthousiast. Maar door de zorgvuldige opzet van de TH-Twente bleek het mogelijk een goede samenwerking te realiseren tussen onderwijskundigen en wiskundigen in een nationale begeleidingscommissie.
Dank zij de medewerking van veel wiskunde docenten en andere betrokkenen bij het wiskunde onderwijs was het in 1981 mogelijk het onderzoek uit te voeren in de tweede klassen van het voortgezet onderwijs. Enige resultaten zullen in het volgende vermeld worden.

## Anker-items

In de toetsen van het Tweede Wiskunde Project zijn enige items opgenomen, die ook in het eerste wiskunde project voorkwamen, de anker-items. Het is interessant de resultaten van deze ankeritems te vergelijken, waarbij we moeten bedenken dat in 1963 de toets in de eerste klas afgenomen is, terwijl dit in 1981 in de tweede klas plaatsvond. Bovendien zijn de schooltypen in 1963 andere dan in 1981.
De leerlingenresultaten zijn in vier populaties ingedeeld, zowel in het eerste als in het tweede project. We komen dan tot de volgende vergelijking:

populatie I : in 1963 vhmo (hbs en gymnasium) en in 1981 havo/vwo
populatie II : in 1963 ulo en in 1981 mavo
populatie III: in 1963 lts en in 1981 lto
populatie IV: in 1963 huishoudschool en in 1981 lhno.

De volgende drie anker-items op het gebied van het lagere school rekenen zijn aan alle leerlingen voorgelegd:

(17) $\frac{2}{5} + \frac{3}{8}$ is gelijk aan

A. $\frac{5}{13}$

B. $\frac{5}{40}$

C. $\frac{6}{40}$

D. $\frac{16}{15}$

E. $\frac{31}{40}$

(18)

0,40 × 6,38 is gelijk aan

A. 0,2552

B. 2,452

C. 2,552

D. 24,52

E. 25,52

(20)

(22 × 18) - (47 + 59) is gelijk aan

A. 290

B. 300

C. 384

D. 408

E. 502

| | populatie I | | populatie II | | populatie III | | populatie IV | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1981 | 1963 | 1981 | 1963 | 1981 | 1963 | 1981 | 1963 |
| item 17 | 90 | 92 | 60 | 87 | 50 | 71 | 30 | 57 |
| item 18 | 77 | 77 | 68 | 84 | 47 | 70 | 45 | 62 |
| item 20 | 85 | 90 | 74 | 93 | 57 | 87 | 59 | 79 |

*Tabel 1*

De gemiddelde p-waarden van deze drie items voor de vier populaties staan in tabel 1.

We zien dat over het algemeen de rekenvaardigheid afgenomen is, waarbij we moeten bedenken dat het curriculum op de huishoudschool in 1963 voornamelijk rekenen was.
De anker-items op het gebied van de algebra hebben hogere p-waarden in 1981 dan in 1963, behalve in populatie III. Hierbij speelt, zeker voor item 34, het feit dat in 1981 de toets in een hoger leerjaar afgenomen is een rol.

De gemiddelde p-waarden van deze drie items staan voor de vier populaties in tabel 2.

(10)

Vereenvoudig: $5x + 3y + 2x - 4y$

A. $7x + 7y$

B. $8x - 2y$

C. $6xy$

D. $7x - y$

E. $7x + y$

(12)

Als $a = bc$ en als $a = 12$ en $b = 3$, dan is $c$ gelijk aan

A. $\frac{3}{4}$

B. 3

C. 4

D. 12

E. 36

(34)

Wat is de wortel uit 12 × 75?

A. 6,25

B. 30

C. 87

D. 625

E. 900

| | populatie I | | populatie II | | populatie III | | populatie IV | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1981 | 1963 | 1981 | 1963 | 1981 | 1963 | 1981 | 1963 |
| item 10 | 96 | 93 | 81 | 78 | 41 | 38 | 21 | 2 |
| item 12 | 95 | 92 | 79 | 69 | 49 | 66 | 38 | 15 |
| item 34 | 85 | 16 | 59 | 15 | 40 | 27 | 14 | 2 |

*Tabel 2*

De lage resultaten in 1963 in populatie IV kunnen veroorzaakt zijn door het feit dat algebra niet in het curriculum voorkwam, zodat veel leerlingen deze vragen overgeslagen hebben.
Kunnen de relatief lage resultaten in 1981 van populatie III vergeleken met populatie II een gevolg zijn van de democratisering van het onderwijs, zodat goede leerlingen van ouders met geringe opleiding nu veel meer kans hebben een avo-opleiding te volgen?

## Andere vragenlijsten

Behalve de cognitieve toetsen zijn in het tweede wiskunde project ook diverse vragenlijstem ingevuld en verwerkt. Zo geeft tabel 3 over de opleiding van de ouders enige informatie over de hiervoor gestelde vraag.

Zo blijkt uit een andere vragenlijst dat de leerlingen van de vier populaties gemiddeld ongeveer evenveel tijd besteden aan het wiskunde huiswerk, maar dat de leerlingen van populatie I ongeveer twee keer zo lang doen over het huiswerk van alle vakken dan de leerlingen van populatie IV (tabel 4).

## Gelegenheid tot leren (GTL)

Aan de docenten is gevraagd om per item van de cognitieve toets aan te geven of de leerstof, nodig voor het beantwoorden van dat item, wel of niet onderwezen is. Dat de resultaten van deze vragenlijst met de nodige voorzichtigheid geïnterpreteerd moeten worden, blijkt uit de gegevens van twee statistiek items. (Onder p is de gemiddelde p-waarde vermeld en onder GTL het percentage van

opleiding vader (moeder) in procenten

| 1981 | populatie I | populatie II | populatie III | populatie IV |
|---|---|---|---|---|
| lagere school | 8 (14) | 17 (23) | 35 (40) | 36 (42) |
| middelbare sch. | 60 (71) | 65 (67) | 55 (50) | 46 (46) |
| universiteit | 27 (10) | 11 ( 3) | 5 ( 2) | 3 ( 1) |
| geen antwoord | 5 ( 5) | 8 ( 7) | 6 ( 8) | 14 (11) |

*Tabel 3*

gemiddeld aantal uren huiswerk

| 1981 | populatie I | populatie II | populatie III | populatie IV |
|---|---|---|---|---|
| wiskunde | 2,2 | 2,3 | 2,3 | 2,2 |
| alle vakken | 9,4 | 8,5 | 4,9 | 4,7 |

*Tabel 4*

| 1981 | populatie I | | populatie II | | populatie III | | populatie IV | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | p | GTL | p | GTL | p | GTL | p | GTL |
| item 7 | 96 | 35 | 89 | 31 | 77 | 42 | 73 | 53 |
| item 21 | 97 | 50 | 91 | 36 | 78 | 39 | 79 | 33 |

*Tabel 5*

de leraren die vinden dat de leerstof voor de toetsafname behandeld is, tabel 5).

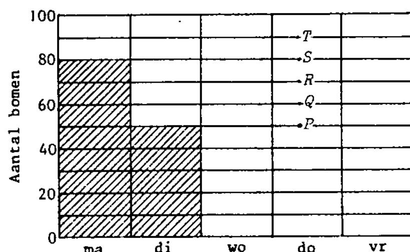
Hier volgen de items

(7)

In deze tabel staat hoeveel bomen er in een week langs een weg zijn geplant.

| Dagen van de week | ma | di | wo | do | vr |
|---|---|---|---|---|---|
| Aantal geplante bomen | 80 | 50 | 60 | 90 | 75 |

In het onderstaande diagram is de aanplant van de eerste twee dagen getekend.




Als je het diagram zou afmaken, welk punt zou dan de bovenkant van de staaf op donderdag aangeven?

A. *P*

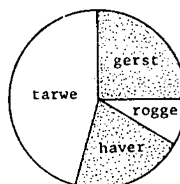
B. *Q*

C. *R*

D. *S*

E. *T*

(21)




Het cirkeldiagram laat de verhoudingen zien tussen de oogsten van verschillende graansoorten, die een land produceert. Welke van de volgende beweringen is WAAR?

A. Er wordt meer haver dan rogge geproduceerd.

B. De grootste oogst is die van de gerst.

C. Er worden gelijke hoeveelheden tarwe en gerst geproduceerd.

D. De kleinste oogst is die van de haver.

E. De hoeveelheid tarwe en gerst samen is minder dan de helft van de totale graanoogst.

Inderdaad wordt over het algemeen statistiek niet in de eerste twee leerjaren van het middelbaar onderwijs onderwezen, maar de leerstof benodigd voor het beantwoorden van deze items wordt in de lagere school behandeld. Het is jammer dat veel wiskunde docenten hier blijkbaar niet van op de hoogte zijn.
Indien de evaluatie van het Tweede Wiskunde Project er onder meer toe zal bijdragen dat de samenwerking van docenten van het basisonderwijs en het voortgezet onderwijs vergroot zal worden, heeft dit onderzoek vruchten afgeworpen.
Hopelijk komt er dan over enige jaren een Derde Wiskunde Project waarin Nederland ook kan participeren.

# De betekenis van het Tweede Wiskunde Project voor het onderwijsbeleid

*A. C. van Essenberg,*
*D. P. M. Krins,*
*J. C. G. van Steen*

## 1 Inleiding

Het initiatief tot het Tweede Wiskunde Project ligt bij de International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA).
Aanleiding tot het onderzoek zijn o.m. de veranderingen in de wiskundecurricula van vele landen sinds de jaren zestig. Het Tweede Wiskunde Project heeft als doel het beschrijven van inhoud en opbrengst van wiskundecurricula, alsmede het verkrijgen van inzicht in de vraag welke factoren de resultaten van wiskunde-onderwijs beïnvloeden.
In dit artikel willen we naar dit onderzoek kijken vanuit het gezichtspunt van onderwijsbeleid. Voordat we daarbij specifiek kijken naar het Tweede Wiskunde Project, zal in paragraaf 2 kort worden ingegaan op de algemene relatie tussen onderzoek en beleid en het gebruik van onderzoeksresultaten in het beleid. Vervolgens gaan we in paragraaf 2 nader in op enkele aandachtspunten van het onderwijsbeleid, waarbij we met name ingaan op kwaliteitsbeheersing. In paragraaf 3 gaan we na of bij de opzet en uitvoering van het Tweede Wiskunde Project voorwaarden zijn geschapen die het gebruik van onderzoeksresultaten door het beleid mogelijk maken en op de betekenis van het Tweede Wiskunde Project voor het onderwijsbeleid.

## 2 De relatie tussen onderzoek en beleid

2.1 *Algemene verkenning*
Het sociaal-wetenschappelijk onderzoek dat in Nederland wordt verricht heeft o.m. betrekking op het onderwijs met zijn verschillende aspecten. Zo kan de onderwijsleersituatie, het curriculum, de relatie leerkracht-leerling onderwerp van onderzoek zijn. We spreken dàn van onderzoek op micro-niveau. Bij onderzoek op meso-niveau gaat het om zaken als de schoolorganisatie, het functioneren van het docenten-team, de besluitvorming van het docententeam. Wanneer het onderzoek het onderwijsbeleid zoals dat wordt gevoerd door de overheid tot onderwerp heeft, dan spreken we van onderzoek op macro-niveau.

Een strikte scheiding tussen deze niveaus is in de praktijk niet altijd te maken. Verschillende gebruikersgroepen, zoals het onderwijsveld (docenten en schoolleiding), de onderwijsorganisaties en de overheid, kunnen vaak gebruik maken van de resultaten van hetzelfde onderzoek, ieder vanuit een andere optiek. Zo kan een onderzoek naar schoolwerkplanontwikkeling resultaten opleveren waar leerkrachten, de schoolleiding en het onderwijsbeleid hun voordeel mee kunnen doen.
Eén van de kenmerken van modern onderwijsbeleid is het streven het beleid door sociaal-wetenschappelijk onderzoek te onderbouwen. Ten behoeve van sociaal-wetenschappelijk onderzoek dat betrekking heeft op verschillende vormen en aspecten van het onderwijs, wordt jaarlijks ruim 20 miljoen gulden uitgegeven door de overheid. Het grootste deel van dit bedrag wordt via de Stichting voor Onderzoek van het Onderwijs (SVO), die ook het Tweede Wiskunde Project heeft gefinancierd, over een aantal onderzoeksinstituten en universitaire onderzoeksgroepen verdeeld.
Bij tal van belangrijke beslissingen wordt ook de politieke druk om het beleid met wetenschappelijk verantwoorde evaluatie te onderbouwen steeds groter.

De relatie tussen onderzoek en beleid wordt vaak gekarakteriseerd als een relatie tussen verschillende werelden, met verschillende belangen, uitgangspunten en culturen.
In de relatie onderzoek-beleid kan men drie situaties onderscheiden:

* De auteurs die werkzaam zijn bij het Ministerie van Onderwijs en Wetenschappen hebben dit artikel geschreven op persoonlijke titel.

1 onderzoek staat los van het beleid: hoewel het onderwerp van onderzoek en beleid een zekere mate van gelijkheid vertoont, gaat ieder zijn eigen weg:
Het onderzoek zal meer beschrijvend of theorievormend van aard zijn. Het beleid vergelijkt hooguit reeds gekozen uitgangspunten met de onderzoeksresultaten.

2 onderzoek loopt voor op het beleid: onderzoekers stuiten in de praktijk op bepaalde problemen:
Aanleiding tot het onderzoek kan zowel pure wetenschappelijke interesse zijn als een verkenning van de sociale werkelijkheid ten behoeve van het beleid.

3 onderzoek volgt het beleid: de voortrekkersrol ligt bij het beleid. Dit kan het geval zijn bij evaluatieonderzoek.

Welke van deze situaties zich zal voordoen is meestal afhankelijk van de fase waárin het beleid zich bevindt (voorbereidingsfase, uitvoeringsfase), van de heersende cultuur op een departement en het soort beleid (al of niet gericht op een duidelijke doelgroep, al of niet interdepartementaal). Bovendien kunnen zich in de praktijk combinaties van situaties voordoen, bijvoorbeeld wanneer een beleidsmaatregel wordt voorafgegaan door een verkennend onderzoek en er tijdens en na de uitvoering evaluatie-onderzoek plaatsvindt.
Een belangrijk aspect van de relatie tussen onderzoek en beleid is het benutten van onderzoeksresultaten. Per slot van rekening wordt beleidsgericht onderzoek juist met dat doel opgezet. Veel onderzoek wordt er dan ook uitgevoerd waarbij gebruiksdoelen voorop staan. Al staat bij de uitvoering van sommig onderzoek de theorievorming voorop, dan nog kan er uiteindelijk behoefte zijn aan gebruik van de resultaten van dit onderzoek.

### 2.2 *Aandachtspunten voor het beleid*

a Wat moeten we verstaan onder beleid?
In deze sub-paragraaf willen we omschrijven wat we in het kader van dit artikel verstaan onder beleid. Een bruikbare omschrijving voor het doel dat we ons gesteld hebben zou als volgt kunnen luiden: het geheel van activiteiten dat door de Rijksoverheid wordt ondernomen ter nastreving van de door haar gestelde doeleinden. We concentreren ons hier dus op het door de Rijksoverheid te voeren onderwijsbeleid. Dat neemt niet weg dat de resultaten van het Tweede Wiskunde Project minstens net zo interessant zijn voor het door anderen te voeren beleid, bijvoorbeeld dat van afzonderlijke scholen, onderwijsorganisaties, enzovoorts. Dit valt echter buiten de reikwijdte van dit artikel.
Als wij het hier hebben over het beleid van de Rijksoverheid dan doelen we op de functie die de Rijksoverheid vervult als subsidiegever. De functie van bevoegd gezag over de Rijksscholen zullen we niet in dit artikel betrekken. Het door het Rijk bekostigde onderwijs dient aan een aantal voorwaarden te voldoen. Een groot aantal daarvan is in of krachtens wettelijke regelingen vastgelegd. Voor een belangrijk deel hebben zij betrekking op de eisen van deugdelijkheid die aan het door de overheid bekostigde onderwijs gesteld moeten worden.

b Kwaliteitsbeheersing
Hoewel de verantwoordelijkheid voor de inrichting van het onderwijs uitsluitend berust bij het bevoegd gezag van een school, heeft de minister van onderwijs door middel van de bekostigingsvoorwaarden een aantal mogelijkheden om het onderwijs te beïnvloeden en zelfs te sturen. Deze bevoegdheden hanteert hij onder meer voor de uitoefening van de hem grondwettelijk opgedragen taak tot bewaking van de deugdelijkheid van het onderwijs.
Wat deugdelijk onderwijs is, laat zich moeilijk eenduidig vaststellen.
De in 1981 door de toenmalige bewindslieden van Onderwijs en Wetenschappen uitgebrachte nota 'Kwaliteit van het onderwijs' gaat uitvoeriger op dit onderwerp in. Kort samengevat komt het er op neer dat kwalitatief goed onderwijs dat onderwijs is dat opleidt tot de eisen die door de samenleving worden erkend. Deze eenvoudige zinsnede beschrijft in feite een zeer complex verschijnsel. De eisen die aan onderwijs worden gesteld veranderen voortdurend, doordat factoren van technologische, economische, onderwijskundige, culturele en demografische aard zich telkens weer wijzigen. Bovendien zijn er tal van groeperingen, zoals docentenorganisaties, besturenorganisaties, oudervereningingen, het georganiseerde bedrijfsleven, wetenschappelijke instellingen, politieke partijen en dergelijke, die elk voor zich de onderwijsdoeleinden anders invullen. De overheid dient in dit

ingewikkelde proces zelf tot keuzen te komen, die uiteindelijk in het parlement worden gelegitimeerd. Het stellen en legitimeren van onderwijsdoelen is in werkelijkheid een complexe zaak, te meer omdat een discussie over het stellen van onderwijsdoeleinden zelden of nooit in een blanco situatie plaatsvindt. Gebruikelijker is dat er reeds onderwijs is dat op bepaalde punten moet worden bijgesteld, waarbij rekening moet worden gehouden met ontwikkelingen die zich reeds voltrekken, met aansluiting op het overige onderwijs en met de ruimte die er voor een bepaald vak is naast andere vakken. De fase van doelstellingen formuleren is desalniettemin een belangrijke fase in het totale proces van kwaliteitsbewaking. In de praktijk komt het er vaak op neer dat er meer sprake is van een doelstellingenanalyse dan van het formuleren van nieuwe doelstellingen. Behalve het formuleren c.q. het analyseren van doelstellingen is het ten behoeve van het proces van kwaliteitsbewaking van belang te kunnen constateren of het onderwijs beantwoordt aan de gestelde doelen.

Volgens de evaluatieliteratuur kunnen we daarbij een onderscheid maken naar de evaluatie van bereikte resultaten en die van het proces dat daaraan ten grondslag ligt. Indien door middel van evaluatie een discrepantie wordt geconstateerd tussen gestelde doelen en bereikte effecten kunnen diverse beleidsmiddelen worden aangewend om in de gewenste richting bij te sturen. De Rijksoverheid kan dan onder meer de regelgeving bijstellen, wijzigingen aanbrengen in budgetten, maar ook bijvoorbeeld modellen van leerplannen laten ontwikkelen, onderzoek doen verrichten, experimenten starten waarmee meer indirect stimulerend dan regelend wordt opgetreden.

## 3 Betekenis van het Tweede Wiskunde Project voor het overheidsbeleid

3.1 *Voorwaarden voor het gebruik van onderzoeksresultaten in het beleid*

a Samenwerking met toekomstige gebruikers voor en tijdens het onderzoek

Hoewel het vaak zo zal zijn dat het initiatief tot een onderzoek wordt genomen door een toekomstige gebruiker, behoeft dit zeker niet in alle gevallen zo te zijn. Het is dan wel belangrijk dat een eventuele gebruiker(sgroep) het initiatief als het ware adopteert. Wanneer men als uiteindelijk gebruiker in alle fasen van het onderzoek betrokken is geweest, ontstaat er een zekere betrokkenheid en verantwoordelijkheid voor de resultaten. Tijdens het onderzoek kunnen toekomstige gebruikers aanwijzingen geven voor een gebuikersvriendelijke rapportering.

Voor wat betreft het Nederlandse aandeel in het Tweede Wiskunde Project is vanaf het begin gestreefd naar een goede samenwerking tussen wiskundigen en onderwijskundigen, opdat de resultaten van het onderzoek van nut zouden kunnen zijn voor leerplandeskundigen, toetsdeskundigen, leraren en beleidsmakers. Voordat een aanvraag tot het verkrijgen van subsidie werd ingediend, werd in een bespreekgroep van wiskundigen en onderwijskundigen van gedachten gewisseld over de opzet en uitvoering van het project. Eerst nadat de zekerheid bestond dat de leden van deze bespreekgroep zich konden vinden in het initiatief, werd een subsidieaanvraag bij SVO ingediend.

Tijdens de uitvoering van het onderzoek heeft deze samenwerking de vorm gekregen van een begeleidingscommissie. In deze begeleidingscommissie, waarin beslissingen werden genomen over opzet, uitvoering en rapportering van het onderzoek, zaten vertegenwoordigers van ondermeer het Centraal Instituut voor Toetsontwikkeling (CITO), de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, de inspectie voortgezet onderwijs, het ministerie van onderwijs en wetenschappen en de nieuwe lerarenopleiding. Mede op verzoek van deze begeleidingscommissie is er een onderzoek gedaan naar de plaats van het meetkunde-onderwijs binnen het wiskunde-onderwijs.

b Een gemakkelijk toegankelijke rapportage

Het is een goede gedachte geweest om een viertal rapporten uit te brengen, die afzonderlijk kunnen worden gelezen en gericht zijn op verschillende gebruikersgroepen.

Het rapport getiteld 'Beschrijving van uitkomsten' is een beschrijvend rapport, waarin een dwarsdoorsnede wordt gegeven van wat er uit het onderzoek is gekomen. Dit rapport biedt de lezer een overzicht van gevonden resultaten en is bestemd voor degenen die in de praktijk van het wiskundeonderwijs werkzaam zijn.

In het rapport 'Opzet en uitvoering' wordt verslag gedaan van een groot aantal details van de uitvoering van het Tweede Wiskunde Project in Nederland. De vraag is hier aan de orde of de gekozen opzet van het Tweede Wiskunde Project zodanig is dat de gegevens van belang kunnen zijn voor toekomstige gebruikers van de resultaten van het onderzoek, met name voor de overheid.
Over het onderzoek van het meetkunde-onderwijs wordt gerapporteerd in 'Aspecten van meetkunde-onderwijs'.
Een voorbeeld van verdere analyse van het beschikbare materiaal wordt weergegeven in het rapport 'Analyses van uitkomsten: Leerstofaanbod en resultaten'. Dit rapport moet worden beschouwd als een voorbeeld van secundaire analyses op het beschikbare bestand van gegevens dat het onderzoek heeft opgeleverd.
Bovengenoemde voorwaarden vormen geen garantie voor een daadwerkelijk gebruik van de onderzoeksresultaten. De wijze waarop in het Tweede Wiskunde Project is voldaan aan deze voorwaarden, draagt er wel toe bij dat er een goed gebruikersklimaat is geschapen voor het gebruik van de resultaten van het onderzoek.

3.2 *Betekenis van het Tweede Wiskunde Project voor het beleid*

De betekenis van het Tweede Wiskunde Project voor het beleid moet vooral gezien worden als een bijdrage aan de evaluatiefase van het proces van kwaliteitsbewaking. De rapportage over het project geeft een uitgebreid overzicht van zowel de bereikte resultaten als van het proces waarmee deze resultaten verkregen zijn. In termen van het begrippenapparaat van de nota 'Kwaliteit van het onderwijs' vinden we informatie o.a. over het onderwijsaanbod dat op de verschillende schooltypen voorhanden is, datgene wat er aan kennis met betrekking tot wiskunde wordt gerealiseerd, het scholingsniveau van de leerlingenpopulatie als geheel, namelijk hoe het niveau van kennis per schoolcategorie ligt, alsmede over het proces waarmee een en ander wordt bereikt. Over dat laatste is de rapportage zelfs tamelijk uitvoerig.
Voor het formuleren van een landelijk beleid vormt de rapportage een hoeveelheid bruikbaar materiaal. Interessant is ook dat het een onderzoek in een internationaal kader is, zodat een zekere vergelijking met andere landen mogelijk is. Het onderzoek geeft de beleidsmaker vooral antwoorden op vragen met betrekking tot de effecten die hij kan verwachten van zijn beleidsmaatregelen. Als het gaat om resultaten van het aantal beschikbare uren wiskunde in de onderscheiden schooltypen, welke niveaus door welk percentage van de schoolpopulatie zijn te bereiken, hoe zich dat vervolgens verhoudt tot wat in andere landen wordt bereikt, kan de beleidsmaker bij de onderzoekers terecht. Behalve de beleidsmaker vinden ook de leerplanontwikkelaar en de leraar relevante informatie, als het gaat om onderwerpen als hoe het huiswerk wordt voorbereid, de mate waarin leerlingen thuis steun en begeleiding ondervinden, hoe zij de lessen ervaren, enzovoorts. De beoordeling van het totale onderzoek hangt dus niet uitsluitend af van de waarde voor de beleidsmaker.

Deze ervaart uiteraard ook beperkingen in het onderzoek; al vallen deze de onderzoekers niet of nauwelijks te verwijten. De beleidsmaker wordt ook geconfronteerd met de vraag welke van de vele eisen die aan het onderwijs worden gesteld als legitiem moeten worden erkend en derhalve tot beleid moeten worden gemaakt. Met name ten aanzien van het wiskunde-onderwijs speelt deze vraag vrij sterk. Hoeveel wiskunde-onderwijs is voor hoeveel leerlingen minimaal noodzakelijk? Wordt wiskunde geëist als noodzakelijke voorwaarde voor bepaalde beroepen of vervolgstudies, of wordt het gebruikt als een oneigenlijk selectiemiddel? En zelfs al is iedereen overtuigd van het belang van wiskunde, wat is dan de relatieve waarde ervan ten opzichte van andere eveneens nuttige en noodzakelijke vakken.

Op deze voor de beleidsmaker eveneens klemmende vragen geven de onderzoekers nauwelijks antwoord. Zoals gezegd valt hen dat niet te verwijten, omdat het ook de opzet van het onderzoek niet was. Bovendien zou een onderzoek naar de noodzakelijke hoeveelheid wiskundige kennis voor het functioneren in beroepen of vervolgopleidingen nog maar in beperkte mate het antwoord opleveren.
De beleidsmaker mag ook niet verwachten dat de onderzoeker dat antwoord levert. Beleid maken

impliceert het doen van keuzen, die vervolgens via de politieke besluitvorming moeten worden gelegitimeerd. Van de onderzoeker mag in dat keuzeproces informatie verwacht worden, zodat de beleidsmaker zijn overwegingen zo expliciet mogelijk kan maken en bij zijn afweging zo duidelijk en consistent mogelijk te werk kan gaan. Met andere woorden de beleidsmaker doet een beroep op de onderzoeker als het gaat om het functioneren van de rede. Dit doet hij bij het Tweede Wiskunde Project niet tevergeefs.
Bij de uiteindelijke beleidsbeslissing is er meer in het geding, bijvoorbeeld wat groeperingen willen, met andere woorden welke belangen er spelen. De afweging daarvan is een beleidsbeslissing. Een goede beleidsbeslissing zal zijn gebaseerd op een redelijke afweging van belangen. Vandaar dat een zorgvuldige evaluatie voor de beleidsmaker een belangrijk instrument is.

## 4 Samenvatting

In het Tweede Wiskunde Project zijn bij opzet en uitvoering voorwaarden geschapen die een zo goed mogelijk gebruik van onderzoeksresultaten mogelijk maakt. Het onderzoek levert een hoeveelheid bruikbaar materiaal ten behoeve van de evaluatiefase van het proces van kwaliteitsbewaking van het onderwijs door de landelijke overheid.


***Over de auteurs:***

*A. C. van Essenberg (1945) studeerde sociologie te Rotterdam. Was van 1971 tot 1979 als wetenschappelijk medewerker verbonden aan het Instituut van Pedagogische en Andragogische Wetenschappen van de Rijksuniversiteit te Utrecht en was tevens docent aan de M.O.-opleidingen pedagogiek te Utrecht.*
*Sinds 1979 verbonden aan het ministerie van Onderwijs en Wetenschappen.*

*D. P. M. Krins (1937) studeerde onderwijskunde aan de Rijksuniversiteit te Utrecht.*
*Was van 1959 tot 1979 werkzaam in het lager onderwijs en lager technisch onderwijs.*
*Sinds 1979 verbonden aan het ministerie van Onderwijs en Wetenschappen.*

*J. van Steen (1952) studeerde organisatiepsychologie aan de Rijksuniversiteit te Utrecht.*
*Sinds 1979 verbonden aan het ministerie van Onderwijs en Wetenschappen.*


# Mededeling

## Tijdschriften

Voor belangstellenden heb ik, tegen vergoeding van onkosten, de volgende tijdschriften ter beschikking:
Christiaan Huygens, 2e t.m. 6e jaargang (1922/23 t.m. 1927/28)
Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, jrg. 6 t.m. 15 (1918/19 t.m. 1927/28)
Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, jrg. 58 t.m. 70 (1970/71 t.m. 1982/83)
H. A. van Herk-Kluyver, Korte Waarder 58,
2415 AV Nieuwerbrug, tel. 03488-495.

# Gelegenheid om te leren. En toch...!

*J. W. Solberg*

## 1 Inleiding

In het Tweede Wiskunde Project is speciaal aandacht besteed aan de vraag in hoeverre en waar de stof, die voor beantwoording van de verschillende toetsvragen nodig is, onderwezen werd. Dit onderzoek naar de 'gelegenheid om te leren' (opportunity to learn) leverde enkele verrassende resultaten op waarop in deze bijdrage nader wordt ingegaan.
Het minst verrassend voor degenen die de schoolpraktijk van nabij kennen is dat het resultaat van onderwijzen en leren niet altijd honderd percent is! Niet iedere leerling die het onderwijs in een bepaald onderdeel heeft gevolgd, haalt een tien voor het proefwerk dat daarna wordt gegeven. Of gebruik makend van in het Tweede Wiskunde Project gehanteerde terminologie: het gerealiseerde curriculum is als regel een deelverzameling van het uitgevoerde curriculum.
Wel verrassend is dat het onderzoek duidelijk laat zien dat er grote verschillen zijn bij de docenten over de vraag welke onderwerpen op welke momenten behandeld worden. Daarover meer in paragraaf 2. Zeer verrassend is ook dat leerlingen blijkens het onderzoek heel wat kennis hebben opgedaan zonder dat ze 'de gelegenheid om te leren' in de zin zoals die in het onderzoek wordt gebruikt, hebben gehad. Meer daarover in paragraaf 3.
Tenslotte wordt in paragraaf 4 kort ingegaan op de vraag wat deze gegevens kunnen betekenen voor ons onderwijs.

## 2 Wat wordt zo al onderwezen?

Dat er bij beantwoording van deze vraag grote verschillen optreden is te illustreren aan enkele voorbeelden die in deze en de volgende paragraaf aan de orde komen. Ook zal aan de hand van enig cijfermateriaal blijken hoe weinig overeenstemming er bestaat over de klas waarin een onderwerp behandeld wordt.
Laten we als voorbeeld nemen item 7 van de kerntoets (zie blz. 60).

Aan de docenten wordt gevraagd waar volgens hen dit onderwerp behandeld wordt, waarbij ze de keuze hebben uit:
A: in de basisschool
B: in de eerste klas voortgezet onderwijs
C: in de tweede klas voortgezet onderwijs
D: in een hogere klas voortgezet onderwijs
E: nooit
F: geen antwoord.
En zie nu eens de gedifferentieerdheid van de antwoorden (uitgedrukt in percenten):

| docenten | A | B | C | D | E | F |
|---|---|---|---|---|---|---|
| havo/vwo | 23 | 10 | 7 | 40 | 17 | 3 |
| mavo | 11 | 10 | 17 | 56 | 3 | 3 |
| lts | 2 | 14 | 39 | 37 | 0 | 9 |
| lhno | 0 | 18 | 63 | 22 | 2 | 4 |

Nog verrassender is het als we dan kijken naar de resultaten van de leerlingen uit de tweede klassen, die aan het Tweede Wiskunde Project deelnamen; een goed antwoord geven:
97% van de havo/vwo -leerlingen;
90% van de mavo-leerlingen;
79% van de lts-leerlingen;
74% van de lhno-leerlingen.
Natuurlijk vraagt men zich af waar deze leerlingen dat dan wel geleerd hebben. Is hier sprake van wat prof. Stalpers ergens 'aanslibbend leren' noemt?
Het moet ons in ieder geval te denken geven dat respectievelijk slechts 40, 38, 55 en 71 percent van de verschillende categorieën leraren denkt dat de

stof die in het hier besproken item aan de orde komt, in of vóór het tweede leerjaar is behandeld. En dit is niet uitzonderlijk. Slechts bij 3 van de 176 items zijn de leraren van alle vier de schooltypen die de betreffende vraag beantwoorden, het erover eens dat de betrokken stof in of vóór het tweede leerjaar behandeld wordt: dat geldt voor de items 1 en 14 van de kerntoets en item 27 van toets A. Maar ook als we kijken naar de docenten van eenzelfde schooltype is er vrijwel nooit volledige overeenstemming.

Zelfs als we de items wat moment van behandeling betreft, grofweg indelen in drie categorieën: 'In of vóór de tweede klas', 'in hogere klassen' en 'nooit', zijn de leraren havo/vwo het bij de Kerntoets in slechts 9 van de 40 gevallen het erover eens dat de betreffende stof in of vóór het tweede leerjaar voortgezet onderwijs behandeld wordt; van de mavo-docenten geldt dit in 7 gevallen, voor de lts- en de lhno-docenten in respectievelijk 6 en 4 gevallen.
Het is duidelijk: 'de gelegenheid om te leren' in de zin van 'onderwezen worden' varieert heel sterk: we wisten het wel zo ongeveer, maar het verzamelde materiaal confronteert ons toch met zaken die we ons niet zo sterk bewust waren. En dat kan een stukje winst zijn.

Opvallend is ook hoe verschillend de verwachtingen zijn ten aanzien van de bagage die de leerlingen meebrengen van de basisschool.
Ter illustratie daarvan nog een tweetal voorbeelden:
- in item 18 van de Kerntoets wordt gevraagd $0{,}40 \times 6{,}38$ te berekenen.
Van de aan het onderzoek deelnemende havo/vwo-docenten neemt 61 % aan dat dit op de basisschool geleerd wordt.
Bij de mavo-, lts- en lhno-docenten bedraagt dit percentage respectievelijk 59, 16 en 20;
- in item 11 van de Kerntoets wordt de inhoud gevraagd 'van een rechthoekig kistje met binnenmaten van 10 cm lang, 10 cm breed en 7 cm hoog'. Van de havo/vwo-, mavo-, lts- en lhno-docenten neemt respectievelijk 42 %, 36 %, 9 % en 12 % aan dat dit op de basisschool geleerd wordt.
Dat leerlingen een aantal opgaven niet of fout maken, ook al hebben ze de stof gehad, weten we uit ondervinding wel. Maar we werden ook geconfronteerd met een opgave die in alle schooltypen door aanmerkelijk meer leerlingen goed werd opgelost dan er, volgens de opgaven van de docenten, in waren onderwezen. Kennelijk is gelegenheid om te leren toch niet zo'n absolute voorwaarde om iets te kennen als we wel eens denken. Daarover iets meer in de volgende paragraaf.

## 3 Geen gelegenheid om te leren en toch geleerd?

De onderzoekers vertolken het gevoelen dat bij iedere leraar leeft als ze op pagina 14 schrijven: 'Leerlingen die met een bepaald leerstofaanbod geconfronteerd zijn, zouden ceteris paribus over meer kennis op het betreffende gebied moeten beschikken dan leerlingen bij wie dit niet het geval is'. Maar op de volgende pagina zetten de schrijvers in een strooidiagram het percentage onderwezen items af tegen het percentage goed beantwoorde items per klas en zij komen tot de conclusie: 'er is nauwelijks sprake van een substantieel verband, hoewel de gevonden correlatie ($r = .22$) gezien de grote N (229) wel significant is'.
Ook waar het onderzoek zich toespitst op de afzonderlijke items 'blijkt ..... er nauwelijks een verband ..... tussen het percentage juiste antwoorden en de mate waarin de betreffende leerstof is onderwezen' (pagina 16).
De auteurs spreken (pagina 16) van 'een *zeer merkwaardig resultaat* omdat het zou betekenen dat – althans voor de gebruikte toetsen – het leerstofaanbod (onder overigens gelijke omstandigheden) nauwelijks effect heeft'.
In tabel 9 op pagina 101 e.v. heeft men van de items uit de Kerntoets waarvoor minimaal 10 observaties bestaan naast elkaar gezet de percentages goede antwoorden van de leerlingen uit de proefpopulatie aan wie de betreffende stof wel en van de leerlingen aan wie deze niet in klas 1 of 2 onderwezen is.
Er zijn verschillen, maar: 'Wat opvalt is dat de verschillen veelal klein zijn en in sommige gevallen zelfs in de negatieve richting'. Overigens is gemakkelijk te berekenen dat die 'negatieve richting' toch altijd nog voorkomt in 23 % van de in tabel 9 opgenomen gevallen! Maar: 'gelet op de grootte van de negatieve verschillen zijn deze waarschijn-

lijk het gevolg van toevals-fluctuaties,' (pagina 16).

'Samenvattend', aldus het rapport (pagina 16), 'blijkt dus dat over de invloed van gelegenheid om te leren niet in generaliserende zin kan worden gesproken. In sommige gevallen heeft het leerstofaanbod veel effect en in andere gevallen kennelijk weinig'. Blijkens een nadere analyse (pagina 17) is de verzameling items die wijzen in de richting van weinig leereffect heterogeen: er 'is in eerste instantie moeilijk een gemeenschappelijke factor te onderkennen'. 'Deze problematiek zal vooral bij secundaire analyse bestudeerd moeten worden', aldus de auteurs. 'Het is belangrijk om daarbij ook aandacht te besteden aan de vraag hoe de leerstof verworven is, in het geval er naar het oordeel van docenten geen onderwijs in is gegeven'.

Het is niet voor het eerst dat aandacht wordt besteed aan het feit dat 'leerlingen al zeer veel zaken ..... weten of ..... kunnen, die nog nooit in de klas aan bod zijn geweest'. De Bruyne verwijst in dit verband naar een onderzoek van Feenstra uit 1981. Daarbij werd 'aan een paar honderd vierdeklassers een toets voorgelegd over het onderdeel 'oppervlaktemeting'. ..... Op het moment van de toets hadden al die leerlingen wel kennis van lengtematen (cm, m, km, enzovoort), maar niemand had voor zover bekend ooit enig onderwijs op het gebied van oppervlaktematen gehad. De toets bestond uit twintig opgaven. Ongeveer 15% van de leerlingen bleek *meer dan 80%* van de opgaven goed te maken! En van de resterende 86% bleek een groot deel op zijn minst een *gedeeltelijke* kennis van het meten van oppervlakten te hebben'.
Aandacht aan de rol van 'voorkennis' besteden ook Schmidt c.a. van de Capaciteitsgroep Onderwijsontwikkeling en Onderwijsresearch van de Rijksuniversiteit Limburg in Maastricht. Met nadruk wijzen zij erop dat men uiterst voorzichtig moet zijn met het trekken van conclusies, maar zij menen toch te mogen spreken over 'het feit dat verschillen in voorkennis een niet onaanzienlijk deel van de verschillen in studieprestaties verklaren'.
Zij verwijzen ook naar een onderzoek van Weeda (1982), die 'vond dat kennis, gemeten voorafgaande aan een cursus Frans, over de condities van zijn experiment heen gemiddeld 50% van de variatie in de scores op een natoets verklaarde'.

## 4 Wat moeten wij daar nu mee?

In hun 'voorwoord' noemen Pelgrum, Eggen en Plomp hun 'Analyses van Uitkomsten: Leerstofaanbod en resultaten' een 'eerste verkenning van het materiaal'. Zij hopen daarmee tevens 'aanknopingspunten voor verdergaande analyses' te bieden. Bij die 'verdergaande analyses' moeten we het echter niet laten. Vraag moet blijven: Wat kunnen we met de resultaten doen om ons wiskundeonderwijs anders, beter te maken?

In ieder geval moeten de onderzoeksresultaten ons te denken geven. Aanknopingspunten daarvoor vinden we – ook – door te vergelijken met situaties waar het anders is, niet om dat andere klakkeloos over te nemen, maar wel om op ideeën te komen. Vergelijken doen we in ons land gemakkelijk de situaties in de verschillende schooltypen. Ook in het Tweede Wiskunde Project is dit gebeurd'; het was 'één van de opties binnen het Nederlandse aandeel aan het project' (pag. 3). Bij de keuze van de aan het project deelnemende scholen is er rekening mee gehouden. Als we kijken naar de totaalresultaten zien we dat van de deelnemende havo/vwo-, mavo-, lts- en lhno-leerlingen respectievelijk 78, 60, 47 en 36 percent van de vragen goed beantwoordt. Nadere uitsplitsing ervan vindt men op pagina 6. Op pagina 7 is weergegeven de relatieve verdeling van het percentage correct beantwoorde kerntoetsitems (40) per klas voor de vier schooltypen en daarbij 'valt vooral op dat de spreiding in het lto relatief het grootst is'. Het vergelijken kan gaan over de grenzen van ons land heen: het Tweede Wiskunde Project is niet voor niets een internationaal project. In de verslaglegging zoals die gepresenteerd is, komen vergelijkingen tussen landen sporadisch voor. Op pagina 4 bijvoorbeeld wijzen Pelgrum, Eggen en Plomp erop dat 'ook landen deelnamen met een wiskunde-curriculum dat zeer sterk van het Nederlandse afwijkt'. Zij vervolgen: 'om die reden komen ook enkele opgaven voor die voor de meeste Nederlandse leerlingen in de tweede klas volstrekt onbekend zijn'. Zij wijzen in dit verband op item 6 uit toets A waar gevraagd wordt naar de verschilvector van twee vectoren. Natuurlijk kan ons dat aan het denken zetten.

Vergelijken kan ook plaats hebben over de grenzen van de tijd heen. Er is niet voor niets sprake van een *Tweede* Wiskunde Project. Over het *Eerste* werd in 1968 door Wiegersma en Groen gerapporteerd.
In een publicatie van de onderafdeling der Toegepaste Onderwijskunde der T.H. Twente uit 1980 '*Enkele mogelijkheden tot het vergelijken van het eerste en tweede wiskunde project*' wijzen Kuper en Eggen op enkele gemeenschappelijke variabelen van de twee projecten die vergelijking mogelijk maken: gemeenschappelijke cognitieve items, gemeenschappelijke achtergrondvariabelen en gemeenschappelijke affectieve vragen. Overigens zijn vergelijkingen vaak moeilijk: zo zijn de onderzochte populaties verschillend, want in het Eerste Wiskunde Project ging het om leerlingen van de vijfde en zesde klas van het lager onderwijs en de eerste klas van het voortgezet onderwijs, terwijl in het Tweede Wiskunde Project de populatie uit tweede-klassers voortgezet onderwijs bestond. Zelfs als men de uitkomsten van de twee onderzoeken op de gemeenschappelijke anker-items vergelijkt, moet men derhalve uiterst behoedzaam zijn, te meer omdat aanvankelijk als zodanig bedoelde anker-items bij nadere beschouwing niet te handhaven zijn. Door de I.E.A. werden 41 items als anker-items gekwalificeerd: hiervan werden er uiteindelijk in de Nederlandse situatie slechts 29 als zodanig aangemerkt.

Tenslotte: het feit dat er geleerd wordt zonder dat er 'gelegenheid om te leren' was en dat 'voorkennis een potentieel belangrijke onderwijs-variabele lijkt te zijn' (Schmidt c.s.) moet ons aan het denken zetten. Kennelijk verloopt leren niet zo duidelijk in fasen, is niet zo precies in hokjes of blokken in te delen als we wel eens gedacht hebben of nog denken. Maar dan is het ook van belang om te achterhalen wat een leerling alvast kent: in plaats van 'bloktoetsen' zouden we kunnen werken met 'voortgangstoetsen' zoals dat gebeurt aan de Rijksuniversiteit Limburg in Maastricht: vier keer per jaar wordt aan de studenten van alle studiejaren dezelfde toets voorgelegd, die 'is bedoeld als een confrontatie met het te bereiken einddoel', aldus Wijnen. Uit de resultaten blijkt heel duidelijk wat de student zich reeds eigen heeft gemaakt en welke vorderingen er zijn sedert de vorige meting. Het is hier niet de plaats om dieper op dit systeem in gaan, maar zeker zou te overwegen zijn of zulk een systeem ook in ons voortgezet onderwijs, wellicht aangepast, gebruikt zou kunnen worden.

**Literatuur**


- Bruyne, H. C. D. de: *Evalueren in de klas*, Van Goor en Zonen, Amsterdam 1983.
- Feenstra, J. J. M.: *Oppervlaktemeten op de basisschool*, Cito, Arnhem 1981.
- Kuper, J., en Eggen, Th. J. H. M.: *Enkele mogelijkheden tot het vergelijken van het eerste en het tweede wiskunde project*, T.H. Twente, onderafdeling der Toegepaste onderwijskunde, Enschede 1980.
- Pelgrum, W. J. en Eggen, Th. J. H. M.: *Tweede Wiskunde Project: opzet en uitvoering*, T.H. Twente, onderafdeling der Toegepaste onderwijskunde, Enschede 1983.
- Pelgrum, W. J., Eggen, Th. J. H. M. en Plomp, Tj: *Tweede Wiskunde Project: Analyses van uitkomsten: leerstofaanbod en leerresultaten*, T.H. Twente, onderafdeling der Toegepaste onderwijskunde, Enschede 1983.
- Schmidt, H. G., de Volder, M. L., Gijselaers, W. H. en Kerkhofs, L. M. M.: *Een positief verband tussen studiejaar en tentamenresultaat, en de rol van toenemende voorkennis*, In: Tijdschrift voor onderwijsresearch (1984), nummer 4, pagina 183-188.
- Stalpers, J. A.: Een 'inleiding' in OMO-cahier 33: '*Onderwijs en onzekerheid*' (symposium bij gelegenheid van het afscheid van Theo Hoogbergen als rector van het Peellandcollege in Deurne, 28 januari 1983).
- Weeda, W. C.: *Beheersingsleren: het model getoetst in de tijd*, Academisch proefschrift 1982.
- Wiegersma, S. en Groen, M.: *Resultaten van wiskunde-onderwijs*, Wolters-Noordhoff, Groningen 1968.
- Wijnen, W. F. H. W.: *Evaluatie van een medische opleiding*, In: P. Weeda (red.): Aspecten van leerplanevaluatie, Malmberg, Den Bosch 1981.


***Over de auteur*:**


*J. W. Solberg; onderwijzer, leraar wiskunde, rector van een lyceum in Eindhoven (1957-1968), directeur C.I.T.O. (1968-1973), docent didactiek van de wiskunde, lid examencommissies voor pedagogisch-didactisch deel, lid Nationale Begeleidingscommissie Tweede Wiskunde Project etc.*

# Aspecten van Meetkunde-onderwijs: mooi meegenomen?

*Agnes Verweij*

In het voorwoord bij het IEA-rapport 'Het Tweede Wiskunde Project: Aspecten van Meetkunde-onderwijs' zegt prof. Van der Blij: '..... dit onderzoek was mede bedoeld om de belangstelling voor meetkunde-onderwijs wat te versterken'. Nu is mijn belangstelling voor meetkunde en meetkunde-onderwijs altijd wel groot geweest sinds mijn eerste leer- en leservaringen met de planimetrie en de stereometrie van de hbs-B. In de zeventiger jaren heb ik met spijt gezien hoezeer deze meetkunde in het voortgezet onderwijs terrein verloor ten koste van het manipuleren met vectoren en het rekenen met coördinaten. Ik beleef er dan ook nu veel plezier aan om met studenten van de lerarenopleiding van de TH Delft, of met de docenten die een HEWET-nascholingscursus aan de TH volgen, bezig te zijn met de ruimtemeetkunde van wiskunde B. Dat dit onderdeel van het nieuwe wiskunde-examenprogramma voor het vwo invloed zal (moeten) hebben op het meetkunde-onderwijs in de onderbouw van het vwo lijkt me duidelijk, maar wellicht zal er ook elders in het voortgezet onderwijs een zeker uitstralingseffect merkbaar zijn.

Dergelijke ontwikkelingen in de nabije toekomst kunnen natuurlijk beter zichtbaar gemaakt worden, als de huidige situatie ten aanzien van het meetkunde-onderwijs goed in kaart gebracht is. Ik vind dan ook dat het een gelukkige gedachte geweest is om in het Nederlandse aandeel in het Tweede Wiskunde Project als extra activiteit een onderzoek naar enkele aspecten hiervan te willen meenemen.

Uit het voorwoord bij het onderzoeksverslag blijkt, dat voor de Nationale Begeleidings Commissie bij dit project een reden om dit plan door te zetten was, dat men de indruk had dat de meetkunde in het Nederlandse wiskunde-onderwijs wat te veel naar de achtergrond geschoven was (zie ook bovenstaand citaat). Waar de auteurs van het verslag, J. Kuper en W. J. Pelgrum, beschrijven hoe de keuze voor meetkunde als onderwerp van extra onderzoek tot stand gekomen is, wordt deze overweging echter niet genoemd. Voor de onderzoekers speelde iets heel anders een rol: de beperkte hoeveelheid tijd die aan een dergelijk onderzoek besteed kon worden. Er waren weliswaar voor diverse onderwerpen internationale vragenlijsten beschikbaar, maar aanpassing aan de Nederlandse situatie was noodzakelijk. En de belangrijkste reden om voor meetkunde te kiezen, was volgens Kuper en Pelgrum eenvoudigweg dat de aanpassing voor dit onderwerp nog het minst bewerkelijk leek!

Later bleek er in de meetkundevragenlijst overigens ook erg veel veranderd te moeten worden. En jammer genoeg ontbrak uiteindelijk de tijd om de aangepaste lijst nog uit te testen in een proefonderzoek, wat met de overige onderzoeksinstrumenten wèl gedaan was.

## Over de opzet van het meetkunde-onderzoek

Voor het Nederlandse aandeel in het Tweede Wiskunde Project was gekozen voor het maken van een momentopname, in april-mei 1981, van het wiskunde-onderwijs in ruim 200 tweede klassen van lhno-, lto-, mavo- en havo/vwo-scholen. Het meetkunde-onderzoek hield zich vooral bezig met de leerstof die de docent in de klas aanbiedt en de manier waarop hij die leerstof behandelt. Als onderzoeksinstrument werd de al eerder genoemde Meetkundevragenlijst gebruikt, een vragenlijst bestemd voor de docenten van de onderzoeksklassen. Met name voor de manier waarop de leerstof in de klas behandeld wordt, lijkt me dit instrument wel èrg beperkt. Juist hiervoor zouden observaties in (een deel van de) onderzoeksklassen een waardevolle aanvulling hebben kunnen betekenen.

Andere bezwaren die ik tegen de opzet van het meetkunde-onderzoek heb betreffen de inhoud van de vragenlijst. In de eerste plaats vind ik het, in verband met de ontwikkelingen op het gebied van de ruimtemeetkunde in de hogere klassen van het vwo, jammer dat de aandacht bij de onderdelen 'Onderwerpen' en 'Behandelingswijzen' van het onderzoek uitsluitend op onderwerpen uit de *vlakke* meetkunde gericht is. Dit was niet nodig geweest, want kennismaking met ruimtelijke figuren behoort in de huidige situatie toch óók tot het curriculum van de eerste twee klassen van het voortgezet onderwijs. Gelukkig wordt in het onderdeel 'Hulpmiddelen' wel gevraagd naar het gebruik van modellen van ruimtelijke figuren door docenten en/of leerlingen, en komt de ruimtemeetkunde nog in twee vragen van het onderdeel 'Uw mening' ter sprake.

In de tweede plaats vind ik het erg jammer dat er in de vragenlijst nergens aandacht geschonken is aan eventuele verschillen tussen jongens en meisjes in het meetkunde-onderwijs. Juist op het gebied van de meetkunde, en dan met name de ruimtemeetkunde, zouden er immers verschillen zijn, misschien zelfs in aanleg, maar zeker in ontwikkeling tussen jongens en meisjes.

Tenslotte wil ik nog iets zeggen over de vorm van de vragen van de Meetkundevragenlijst. Het zijn vrijwel allemaal gesloten vragen. Dat vind ik niet verstandig in een geval zoals dit, waarin de voorbereidingstijd te kort was om de voorgeprogrammeerde antwoordmogelijkheden in voldoende mate te kunnen toesnijden op de te onderzoeken situatie en de antwoorden zó te formuleren dat deze niet voor meerdere uitleg vatbaar zijn. Dan kan beter achteraf wat meer tijd uitgetrokken worden voor verwerking van antwoorden op open vragen. Bij veel van de gesloten vragen van de Meetkundelijst had ik in elk geval graag de open toevoeging 'zo ja, hoe?' of 'waarom?' gezien.
In de lijst komt wel een keer de volgende vraag voor: 'Wilt u indien u problemen hebt gehad met het beantwoorden van bovenstaande vragen ....., deze hieronder omschrijven?' Een uitstekend idee; door zo'n open vraag kan immers ook informatie verkregen worden over de betrouwbaarheid van de beantwoording van gesloten vragen.

## Over de presentatie van de resultaten

Eerlijk gezegd maakt de presentatie van de resultaten op mij hier en daar een beetje een opgeklopte indruk. Ik zal een voorbeeld geven. Na de uitvoerige analyse van de problemen die de docenten volgens eigen opgave (het resultaat van bovengenoemde open vraag) hadden ondervonden bij het schatten van de aantallen lesuren die aan de diverse meetkunde-onderwerpen besteed waren, had men kunnen volstaan met de opmerking dat de schattingen zó onbetrouwbaar waren dat aan de opgegeven aantallen geen verdere conclusies verbonden mogen worden. Maar men geeft dan toch nog een ruim opgezette tabel met de gemiddelden van die aantallen en de standaarddeviaties. En nadat, zonder nadere motivering, is aangenomen dat de docenten wèl vrij nauwkeurig weten welk onderwerp méér en welk minder tijd gekost heeft, volgt niet alleen een tabel 'Ordening onderwerpen per schooltype naar bestede hoeveelheid tijd' plus interpretatie, maar óók nog de tabel 'Ordening onderwerpen per schooltype naar bestede uren, voor zover de onderwerpen worden onderwezen'. Dat is me echt te veel van het goede.

Heel vervelend vind ik dat de invloed van de methode, de leerboekenserie, pas aan het eind van het rapport ter sprake komt. Bij het lezen van het rapport had ik van het begin af aan steeds het gevoel dat deze invloed van meer betekenis zou kunnen zijn dan alle andere aangevoerde mogelijke verklaringen van de resultaten. Toen ik in het laatste hoofdstuk van het rapport tenslotte las dat een van de onderzoeksresultaten was: '..... over het algemeen geldt, dat de meeste docenten een onderwerp onderwijzen als het in de methode staat, en het niet behandelen als het niet in de methode staat', vroeg ik me bijvoorbeeld af waarom in het begin van het rapport zóveel moeite was gedaan om, zonder de methode erin te betrekken, een verklaring te vinden voor het feit dat gelijkvormigheid van driehoeken zo weinig aan leerlingen van de tweede klassen havo/vwo onderwezen was. Immers, in het laatste deel van het rapport wordt ook opgemerkt dat voor de methode Moderne Wiskunde geldt dat gelijkvormigheid, gezien de plaats in de methode, nog net vóór, maar even goed net ná de onderzoeksdatum aan bod gekomen kan zijn.

Ronduit onbegrijpelijk vind ik het dat de Leraren Werk Commissie zich, bij het uitzoeken van welke van de zes in het onderzoek betrokken onderwerpen wèl en welke niet in de eerste en tweede klas deeltjes van de verschillende methoden voorkomen, heeft beperkt tot de methoden die de leden van deze commissie zelf gebruikten. Voor havo/vwo is dit werk daardoor alleen voor de methode Moderne Wiskunde gedaan, terwijl ik dit in een half uurtje ook voor Getal en Ruimte en Sigma klaar had. Toen zag ik dat gelijkvormigheid in de eerste en tweede klas-delen voor havo/vwo van deze laatste twee methoden zelfs helemaal niet voorkomt! De (13%) 'Sigma-docenten' die dit onderwerp desondanks behandeld hadden, hadden dus duidelijk eigen initiatief getoond.

## Over de resultaten van het meetkunde-onderzoek

Dat ik hier en daar wat kritiek heb op de opzet van het onderzoek en op de manier waarop de resultaten gepresenteerd zijn, neemt niet weg dat ik het rapport met veel plezier gelezen heb. Een aantal resultaten lijkt me zeker van belang voor mijn werk in lerarenopleiding en nascholing. Ik zal op de aspecten die mij het meest troffen ingaan.
Allereerst wat betreft 'Behandelingswijzen': het idee om deskundigen (docenten, vakdidactici) een indeling te laten maken in concrete en abstracte behandelingswijzen bij de zes onderzochte meetkunde-onderwerpen, vind ik een prima vondst. Zo kon achteraf het vermoeden bevestigd worden dat 'over het algemeen de abstracte manieren meer op het avo dan op het lbo gebruikt worden, terwijl dit voor de concrete manieren omgekeerd ligt'. En nadat ik nog wat tijd besteed had aan een eigen onderzoekje naar het wel of niet voorkomen van de in het rapport genoemde behandelingswijzen van de stelling over de som van de hoeken van een driehoek in Getal en Ruimte en Sigma voor havo/vwo, vond ik het opmerkelijk te constateren dat de door de betreffende docenten gebruikte 'extra' behandelingswijzen – behandelingswijzen die niet in de methoden voorkomen – voornamelijk concreet zijn. Bij Moderne Wiskunde, waarvoor dit werk door de Leraren Werk Commissie was gedaan, wordt dit beeld op havo/vwo verstoord doordat 33% van de Moderne-Wiskunde-docenten zegt de, als abstract geclassificeerde, behandelingswijze 'Lijn door hoekpunt evenwijdig aan overstaande zijde (F, Z-hoeken)' te gebruiken, terwijl deze niet in de methode voorkomt. Hier zou echter van een misverstand sprake kunnen zijn, omdat de bijbehorende figuur erg lijkt op een àndere, niet in het meetkunde-onderzoek betrokken, behandelingswijze die wèl in Moderne Wiskunde voorkomt. Hoe dan ook, vragen die bij mij opkomen zijn: vinden de docenten die Getal en Ruimte of Sigma gebruiken dat er in hun methode voor havo/vwo te veel de nadruk gelegd wordt op de abstracte behandelingswijzen? en hoe zit dat met Moderne Wiskunde?

In het onderdeel 'Instructiematerialen' viel mij op hoeveel docenten (ruim 70%) naast het leerboek ook nog van zelfgemaakte schriftelijke materialen (stencils e.d.) gebruik maken. Aan dit verschijnsel zouden we, denk ik, in onze lerarenopleiding meer aandacht moeten besteden.

Bij 'Hulpmiddelen' werd mijn aandacht getrokken door: 'als men de schooltypen ordent op grond van de percentages docenten die gebruik maken van hulpmiddelen, komt men tot de ordening havo/vwo, mavo, lto, lhno' (van laag tot hoog). Als mogelijke verklaring wordt genoemd 'dat de problemen die leerlingen op resp. havo/vwo, mavo, lto en lhno hebben met meetkunde steeds groter worden'. Dat zou dus betekenen dat het niveau van het gegeven meetkunde-onderwijs in deze volgorde steeds minder goed aansluit bij het betreffende type leerlingen. Dit kan ik moeilijk geloven, zeker gezien de eerder in het rapport gesignaleerde grotere vrijheid die men juist op het lhno heeft bij de keuze van de inhoud van het wiskunde-onderwijs. Een plausibeler verklaring zie ik in de verschillen tussen de lerarenopleidingen die de docenten van de diverse schooltypen gevolgd hebben. Een lbo-docent die, vóór zijn studie voor de wiskunde-onderwijsbevoegdheid, al op de Pedagogische Academie met allerlei hulpmiddelen heeft leren werken, zal daardoor waarschijnlijk meer geneigd zijn deze middelen bij zijn meetkunde-onderwijs te gebruiken dan een universitair opgeleide havo/vwo-docent. Maar afgezien daarvan, als lhno-leerlingen die moeite hebben met meetkunde, geholpen kunnen worden

door veel hulpmiddelen aan te bieden, waarom zou men dat dan ook niet vaker op havo/vwo proberen, zelfs al zou het hier om een klein aantal leerlingen met minder grote problemen gaan?

Bij 'De mening van de docenten over meetkunde-onderwijs' zag ik een resultaat dat me verheugt in verband met de mogelijke uitstraling van de ruimtemeetkunde naar de onderbouw van het gehele voortgezet onderwijs. Ruim driekwart van de bij het onderzoek betrokken docenten is het eens met de uitspraak: 'In het onderwijsprogramma van de eerste twee leerjaren dienen activiteiten opgenomen te worden, die tot doel hebben dat het ruimtelijk inzicht bij de leerlingen vergroot wordt' en nog geen 9% van de docenten is het hiermee oneens. Opmerkelijk vind ik, dat het juist de groep havo/vwo-docenten is die het laagst scoort bij 'eens' : 66%, en het hoogst bij 'oneens': 17%.

Tenslotte: driekwart van alle bij het onderzoek betrokken docenten vindt dat 'Driedimensionale meetkunde dient voor deze leerlingen alleen in verband met metingen (volume, oppervlakte etc.) te worden onderwezen'. Minstens de helft van de docenten is het dus eens met déze uitspraak èn met de uitspraak over het vergroten van het ruimtelijk inzicht bij deze leerlingen. Ik ben heel benieuwd wat deze docenten onder 'ruimtelijk inzicht' verstaan.

## Tot slot

In het bovenstaande heb ik aangegeven welke informatie uit het rapport 'Het Tweede Wiskunde Project: Aspecten van Meetkunde-onderwijs' voor mij en mijn werk het meest van belang is. Ik denk dat er voor ieder die met meetkunde-onderwijs te maken heeft wel iets interessants te vinden is in dit rapport. Wel is het zo, dat er wellicht meer, belangrijker, maar zéker betrouwbaarder resultaten verkregen hadden kunnen worden als men wat meer tijd en aandacht aan de voorbereiding van het meetkunde-onderzoek had kunnen besteden. Maar dit extra onderzoek bij het Tweede Wiskunde Project heeft wel zó veel ideeën voor verder onderzoek op het gebied van het meetkunde-onderwijs opgeleverd, dat ik alleen daarom al vind dat men er goed aan gedaan heeft dit onderdeel in het project mee te nemen.

***Over de auteur:***

*Agnes Verweij is 9 jaar lerares wiskunde geweest, was daarna gedurende 5 jaar werkzaam aan de NLO Zuid-West Nederland en is sinds 1981 verbonden aan de TH-Delft als docent didactiek van de wiskunde.*

# Geef ze de ruimte

*Jan Breeman*

## 1 Toen

Ten tijde van mijn middelbare schoolopleiding (examen hbs-B 1957) stond het meetkundeonderwijs in de lagere klassen nog sterk in het teken van de microscopie van de driehoek. Zelfs axioma's speelden een belangrijke rol.

*Bij mijn vorige verhuizing hebben we uren lang geprobeerd een tweepersoonsspiraalbed langs een wenteltrap naar boven te brengen. Uiteindelijk vonden we een plekje in de garage.*

In de 4e en de 5e klas van de hbs kregen we stereometrie en beschrijvende meetkunde. Bij het examen was ik trots op mijn vrijstellingen voor het mondeling examen (schriftelijk examen $\geqq 7$).

*In de binnenstad van Rotterdam worden de open plekken die jarenlang onbebouwd zijn gebleven nu voor een belangrijk gedeelte gebruikt voor woningbouw. Men kan gedurfde architectonische variaties zien. Ook de zogenaamde kubuswoningen komen voor. Verbazingwekkend, pas toen ik binnen was, begreep ik hoe het in elkaar zit.*

Bij mijn MO-opleiding maakte ik kennis met projectieve meetkunde, analytische meetkunde en differentiaalmeetkunde.

Alweer goede resultaten.

*Al jarenlang probeer ik mijn conditie op peil te houden door geregeld een partijtje te tennissen. Pas gisteren zag ik 'echt' hoe een blik tennisballen er uit ziet. Met 'echt' bedoel ik dan: ik maakte mij bewust welk verband er bestaat tussen het aantal ballen en de afmetingen van het blik en de ballen.*

De meetkundelessen die ik in mijn eerste jaren voor de klas gaf aan de onderbouw van een gymnasium-afdeling (begin 60er jaren) waren sterk geïnspireerd door datgene wat ik zelf als leerling had gekregen. Alleen de axioma's werden wat minder sterk benadrukt.

Gebruikte ik toen al die houten kubus? Nee, toch niet, dat was pas later.

Welke punten lagen ook al weer op één rechte lijn? Hoe heette die lijn nou toch? O ja, de rechte van Euler.

Die lessen gaf ik enthousiast en ik meende dat ze op een enkeling na succes hadden bij de leerlingen.

Gelukkig vroegen ze niet al te vaak: 'Waarom moeten we dit leren, mijnheer?' En die enkele keer dat het wel gebeurde, had ik wel een schijnantwoord (dat ik wel meende!) in de trant van: 'Dat hebben ze nodig bij ...'.

*Enige tijd geleden zag ik een advertentie voor een wasverzachter. Getekend waren een grote fles en een kleinere waarvan de afmetingen ongeveer de helft waren van die van de grote. In kapitale letters stond erbij: NU 3 KEER GECONCENTREERD. Ik snapte dat niet helemaal.*

In de bovenbouw gaf ik in die tijd stereometrie. Daar hadden de leerlingen in het begin altijd moeite mee. Aan het eind konden ze toch echter allemaal bewijzen dat al die punten op één bol lagen, zonder dat ze die bol ooit hadden gezien.

*Een jaar of tien geleden, toen mijn kinderen nog helemaal opgingen in hun spel met bouwelementen, hielden we wel eens een wedstrijd: wie het mooiste ding kon bouwen. Wat was ik jaloers op hun resultaat!*

Wat veranderde er veel bij de herziening van het leerplan. Het viel bovendien ook nog samen met de invoering van de mammoetwet.

Jammer toch, dat die ruimtelijke modellen alleen maar aan de orde werden gesteld in hoofdstuk 1 van deel 1.

Daarna moesten de kinderen weer worden opgeleid tot Platlanders.

*Bij het herzien van de opstalverzekering van mijn woning bleek dat de herbouwkosten gerelateerd zijn aan de inhoud van mijn huis in $m^3$. Wat had ik een moeite om zo uit het vuistje een reële schatting van die inhoud te maken.*

## 2 Nu

a In het huidige wiskunde-één programma behandel ik de inhoud van omwentelingslichamen. Absurd dat ik dan ineens de inhoud van een cilinder uit de lucht laat vallen. Als ik ze de inhoud van het stuk regenpijp, dat ik in mijn lokaal heb, laat schatten zitten de leerlingen er flink naast.

*Laatst mocht je op de plaatselijke Braderie raden hoeveel knikkers er in een grote pot zaten. Over de blunder die ik toen maakte zullen we maar zwijgen.* De laatste lichting wiskunde-twee is nu in 5 atheneum van start gegaan. Een uitstekend vak om logisch te leren denken. Wat dat betreft zal ik het straks missen. Gelukkig dat het meetkundige aspect tegenwoordig wat meer accent krijgt, zodat de meetkundige inspiratie een stuk algebraïsche transpiratie kan voorkomen.

*Op zoek naar een voorbeeld keek ik even in de kamer om mij heen, ik zag o.a. een viertal cilinders, nogal wat balken, een enkele kubus, een afgeknotte kegel en dat stapeltje ordners vormde keurig een recht prisma. Toen ik het licht aandeed dacht ik mijn trouwe hyperbool weer te zien, maar bij scherper opletten zag ik dat het nu een parabool was doordat bij het afstoffen de lampekap iets verdraaid was.*

b Het Tweede Wiskunde Project is uitgevoerd in de periode 1979-1983. In het algemeen zullen de bevindingen nog weinig beïnvloed zijn door de ideeën die samenhangen met de herverkaveling van de wiskunde voor de bovenbouw van het vwo.
Ten aanzien van het rapport beperk ik mij tot enige uitspraken van docenten die betrekking hebben op de meetkunde van de ruimte.
Uit tabel 20: Antwoordpercentages bij doelstellingsuitspraken.
Uit tabel 38: Curriculum-analyse meetkunde (1e + 2e leerjaar)

Bij tabel 38:

kolom 1: S ...dit onderwerp krijgt een Systematische behandeling
I ...er vindt slechts Incidentele behandeling plaats

kolom 2: A...komt aan de orde voor Alle leerlingen
S ...Sommige leerlingen wordt dit aangeboden

kolom 3: Z ...Zeer belangrijk, kan absoluut niet gemist worden
B ...Belangrijk
N...Niet belangrijk, behandeling zou in principe achterwege kunnen blijven
– ...komt geheel niet aan de orde

**Tabel 20: Antwoordpercentages docenten bij doelstellingsuitspraken.**

| | uitspraak | mening | havo/vwo | mavo | lto | lhno |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 86 | Een heel belangrijk leerdoel in de eerste twee leerjaren is het ontwerpen van wiskundige modellen voor situaties in het dagelijks leven. | eens | 41 | 62 | 72 | 80 |
| | | geen mening | 19 | 12 | 11 | 9 |
| | | oneens | 40 | 26 | 17 | 11 |
| 89 | Het is wenselijk dat meetkundige begrippen worden aangeboden in een volgorde, die bepaald is door een axiomatische benadering. | eens | 29 | 18 | 34 | 26 |
| | | geen mening | 21 | 30 | 28 | 15 |
| | | oneens | 50 | 52 | 38 | 60 |
| 90 | Een intuitieve benadering heeft meer betekenis voor leerlingen uit de onderzoekklas dan een formele benadering. | eens | 79 | 84 | 79 | 79 |
| | | geen mening | 5 | 10 | 11 | 15 |
| | | oneens | 16 | 6 | 9 | 6 |
| 92 | Het gebruik van concrete modellen en leermiddelen is essentieel bij het meetkunde-onderwijs in de eerste twee leerjaren. | eens | 61 | 80 | 83 | 85 |
| | | geen mening | 21 | 12 | 11 | 11 |
| | | oneeens | 18 | 8 | 6 | 4 |
| 97 | In het onderwijsprogramma van de eerste twee leerjaren dienen activiteiten opgenomen te worden, die tot doel hebben dat het ruimtelijk inzicht bij de leerlingen vergroot wordt. | eens | 66 | 73 | 93 | 83 |
| | | geen mening | 17 | 18 | 4 | 13 |
| | | oneens | 17 | 9 | 4 | 4 |

| | havo/vwo | | | mavo | | | lto | | | lhno | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 | 1 | 2 | 3 |
| Eigenschappen van lijnen en vlakken in de ruimte | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - | - |
| Ruimtefiguren | | | | | | | | | | | | |
| Kubus, balk | S | S | B | S | S | B | S | A | Z | S | A | Z |
| Pyramide | S | S | N | I | S | N | I | S | B/N | I | S | B/N |
| Prisma | I | S | N | I | S | N | - | - | - | - | - | - |
| Kegel | - | - | - | - | - | - | I | S | N | I | S | N |
| Cilinder | S | S | N | I | S | N | I | S | N | I | S | N |
| Bol | S | S | N | I | S | N | - | - | - | - | - | - |

De hierboven weergegeven registratie van de uitspraken van docenten kan ik alleen begrijpen als ik uitga van:

a de uitspraken zijn sterk gerelateerd aan het huidige leerplan van de onderbouw en het leerplan van de bovenbouw vóór de herverkaveling.

b docenten hebben vaak een opleiding gehad die als het om meetkundig inzicht gaat zich voornamelijk heeft gericht op die van het platte vlak (zie I: het ruimtelijk inzicht wordt maar zwak ontwikkeld omdat (te) snel de algebra te hulp wordt geroepen).

c een brede discussie over zingeving van wiskundeonderwijs is nog maar nauwelijks op gang gekomen.

## 3 Straks

Belangwekkende wijzigingen worden aangebracht in het programma bovenbouw vwo, ook een nieuwe opzet voor de bovenbouw havo mag binnen enkele jaren verwacht worden en de sneeuwbal zal nog wel verder rollen.

Zinvolle wiskunde heeft de toekomst.

De vaardigheid van het mathematiseren (wiskunde A) zal voor de nieuwe generatie een nuttige zaak zijn. Niet alleen voor een verdere studie, maar vooral voor een beter begrijpen van de wereld om ons heen.

Voor dat beter begrijpen van onze wereld is een behoorlijk meetkundig inzicht niet minder belangrijk. In de nieuwe opzet vindt de meetkunde slechts een plaats in wiskunde B, een vak dat naar verwachting toch aan een beduidend kleiner aantal leerlingen zal worden gegeven dan wiskunde A. Hierdoor komt de verantwoording voor het ontwikkelen van dat meetkundig inzicht grotendeels voor rekening van hetgeen zich afspeelt in de onderbouw.

Voor het toepassen van wiskunde en van de meetkunde in het bijzonder heb ik als netjes opgevoede Platlander, die opstandig geworden is, met het bovenstaande willen pleiten voor een belangrijker aandeel voor de meetkunde van de ruimte in de nieuw op te stellen leerplannen voor de onderbouw.

Daarvoor is een wiskundig bewust worden (zie blik ballen) van wat we zien een nodige eerste stap. Het vol zetten van je lokaal met concrete modellen, die zo uit het dagelijkse leven geplukt kunnen worden, is dan een logische tweede stap. Het in handen nemen levert juist voor jonge mensen een belangrijke leerervaring.

*Over de auteur*:

*Jan Breeman is werkzaam in Waddinxveen. Vooruitlopend op de herverkaveling heeft hij leerlingenmateriaal ontwikkeld voor 4-atheneum waarin toepassingen van de wiskunde binnen de programma's van andere schoolvakken aan de orde worden gesteld.*

# 'Zulke goede resultaten?! Was die toets wel goed?'

*Harrie Broekman, Johan Weterings*

*Je mag je mening verdedigen vind ik,*
*mits je af en toe eens de Dom beklimt*
*om een en ander van afstand te bekijken.*
W. M. G. Querelle
Nieuwe Wiskrant 4, nr. 1

Berichten in de dagbladpers over goede resultaten van 'onze' leerlingen bij het Tweede Wiskunde Projekt (TWP) roepen bij ons de vraag op wát die resultaten dan zijn en hóe ze gemeten zijn. Om dat na te gaan hebben wij ons speciaal gericht op de gebruikte toets-items uit het TWP. In dit artikel willen wij vooral ingaan op de gehanteerde kerntoets, door deze aan een nader onderzoek te onderwerpen.
Verder zullen we een aanduiding geven van enkele mogelijke manieren van gebruik in de lerarenopleiding van de tabellen, overzichten e.d. uit het verslag van het TWP.

In een volgend artikel zullen wij duidelijk maken waarom wij niet zo gelukkig zijn met andere onderdelen van het onderzoek. Met name het ontbreken van de mogelijkheid om verbanden te leggen tussen diverse onderdelen van het onderzoek zullen wij daarbij belichten. Dit vooral vanuit de gedachte dat de gepubliceerde feiten an sich niet het wezenlijke aangeven van hetgeen wij zouden willen weten over het wiskunde-onderwijs in Nederland. We zoeken speciaal naar de interpretaties en de vaststelling van het belang van de beschreven en de geïnterpreteerde gebeurtenissen/feiten voor ons wiskunde-onderwijs.

## Proefwerken en toetsen

Soms is het zinvol iets duidelijk te maken door te kijken naar een vergelijkbare situatie. Dat willen we in deze paragraaf ook doen. We zullen een aantal aspecten van de kerntoets belichten door wat nader stil te staan bij het construeren van een proefwerk.
Een docent[1] die een proefwerk maakt zal in eerste instantie nagaan wat en hoe hij iets behandeld heeft. Afhankelijk daarvan zal hij vragen opstellen. Hij kan ook een proefwerk van een collega nemen. Stel dat hij dan alleen let op het *onderwerp* dat in het proefwerk getoetst wordt (bijv. stelling van Pythagoras) en stel dat hij dit proefwerk zonder veranderingen geeft aan zijn leerlingen. Dan heeft hij grote kans dat de leerlingen minder goed scoren op dat proefwerk. Kunnen we nu concluderen dat zijn leerlingen dom zijn? Het lijkt ons van niet.
Stel nu dat een leraar de kerntoets van het TWP zou lenen om in zijn klas te gebruiken. Waar zou hij dan allemaal op kunnen letten om te kijken of deze toets geschikt is voor zijn klas?
Een eerste vraag die de leraar zich zou kunnen stellen is: Welke doelstellingen zitten opgesloten in deze toets? Daarbij verstaan wij onder doelstellingen een zo concreet mogelijk omschreven al dan niet wiskundig gedrag van leerlingen.
Dus niet 'oplossen tweedegraads vergelijkingen' maar 'de leerling moet opgaven van het type $2x^2 + 3x - 7 = 0$ kunnen oplossen m.b.v. de methode kwadraatafsplitsen', etc.
Bij een aantal items van de kerntoets zijn de doelstellingen direct duidelijk. Bijvoorbeeld:

(10)

Vereenvoudig: $5x + 3y + 2x - 4y$

A. $7x + 7y$

B. $8x - 2y$

C. $6xy$

D. $7x - y$

E. $7x + y$

Bij andere items is het wat moeilijker. Bijvoorbeeld:

(18)

0,40 × 6,38 is gelijk aan

A. 0,2552

B. 2,452

C. 2,552

D. 24,52

E. 25,52

Toetst men hier de vaardigheid 'vermenigvuldigen', 'schatten', of het 'adequaat met een rekenmachientje om kunnen gaan'?

(22)

Als $6x - 3 = 15$

| | | |
|---|---|---|
| dan | $6x = 15 - 3$ | (1) |
| en | $6x = 12$ | (2) |
| en | $x = \frac{12}{6}$ | (3) |
| en | $x = 2$ | (4) |

**Als er in bovenstaande redenering een fout zit, in welke regel komt deze fout dan het EERST voor?**

A. (1)

B. (2)

C. (3)

D. (4)

E. **Geen van bovenstaande antwoorden, er is geen fout.**

Gaat het hier om het kunnen oplossen van een eerstegraads vergelijking, of om vaardigheden als het kunnen controleren en analyseren van een uitwerking?

(40)

De temperatuur aan de voet van een berg is 31 graden. Op de top van de berg is de temperatuur -7 graden. Hoeveel warmer is het aan de voet van de berg?

A. -38 graden

B. -24 graden

C. 7 graden

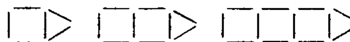
D. 24 graden

E. 38 graden

Gaat het hier om het kunnen optellen/aftrekken of om het goed kunnen lezen?

(31)

Luciferhoutjes worden als volgt gerangschikt:



Als het patroon wordt voortgezet, hoeveel luciferhoutjes zijn er dan nodig om de 10$^{e}$ figuur te maken?

A. 30

B. 33

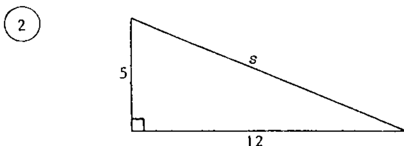
C. 36

D. 39

E. 42

Wat zou hier de achterliggende doelstelling zijn en, vooral, wanneer en hoe is hier aandacht aan besteed?
In verband met de hiervoor gemaakte opmerkingen is het zinvol te wijzen op een aantal artikelen die Freudenthal heeft geschreven over de vierkeuzetoetsen van het mavo-3 en lto-C (bijv. 1978, 1980). Daarin trekt hij van leer tegen een aantal aspecten van die meerkeuze-eindexamens. Zo laat hij ondermeer zien hoe een eenvoudige meetkundeopgave vertroebeld wordt door de overlading van verzamelingennotaties. In die opgave ging het dan ook duidelijk niet om een meetkundedoelstelling maar om de vaardigheid 'verzamelingentaal decoderen'. Ook laat hij zien hoe leerlingen met een juiste toetsmentaliteit (bijv. de alternatieven invullen in de vergelijking) minder in problemen komen dan leerlingen die een opgave 'netjes wiskundig' willen oplossen. Een ander aspect waar hij op wijst is het 'volgepakt zijn' van sommige toetsitems. Hij doelt daarmee op de vraagstukken waarbij een leerling diverse vaardigheden moet beheersen en allerlei kennis moet hebben om ze op te kunnen

lossen. Bij foutieve beantwoording is dan ook niet aan te geven wat men precies fout of goed doet.
Niet altijd hoeft dus een item over een bepaald onderwerp de bijbehorende doelstellingen te toetsen; er kunnen meer doelstellingen in het geding zijn. Het kan zelfs zo zijn dat zo'n item meer discrimineert t.a.v. zo'n – niet bedoelde – doelstelling (bijv. lees- en toetsvaardigheid).
Daarbij komt nog een ander probleem. We willen dit verhelderen aan het onderwerp 'stelling van Pythagoras'.
Binnen het onderzoek wordt nagegaan op hoeveel en welke manieren de stelling van Pythagoras wordt behandeld. Er worden hierbij een tiental manieren gegeven. Deze manieren hoeven door de docenten niet met dezelfde intentie behandeld te zijn. Zo kan de methode van 'metend en rekenend ontdekken' voor de één de manier van uitleggen zijn, terwijl het voor de ander een inleiding is om de noodzaak van bewijzen aan te tonen.
Zo kan het bewijs met 'verhoudingen van oppervlakte in gelijkvormige rechthoekige driehoeken' voor de één het bewijs zijn, terwijl de ander dit gebruikt als toepassing bij gelijkvormigheid van driehoeken. In beide gevallen geldt dat door docenten verschillende accenten worden gelegd en dus ook verschillende doelstellingen worden nagestreefd.
In de kerntoets vinden we, wat betreft het onderwerp 'stelling van Pythagoras', alleen de volgende opgave:




Wat is de waarde van *s*?

A. 7

B. 13

C. 15

D. 17

E. Geen van bovenstaande antwoorden.

Welke doelstelling wordt hier getoetst en waarom wordt er geen aandacht besteed aan de andere doelstellingen?

Kort samengevat:
Een toets is meer dan een lijst onderwerpen. Binnen een goede toets zullen alle accenten en specifieke doelstellingen die een leraar (gelegd) heeft terug te vinden zijn. Als leerlingen een fout maken op een (meerkeuze)-toets kan het zijn dat de leerlingen de stof niet begrepen hebben. Het kan ook zijn dat je iets heel anders getoetst hebt dan je eigenlijk wilde toetsen.
Zoals in het voorgaande al naar voren kwam, kan men behalve naar achterliggende doelstellingen ook kijken naar de vorm van de toetsitems. Los van het aspect 'open of gesloten vragen' en los van het 'aantal alternatieven' kan men een toets beoordelen door middel van een aantal aandachtspunten. Zo onderscheiden De Groot en Van Naerssen (1969) de volgende criteria:
Relevantie
Objectiviteit
Specificiteit
Efficiëntie
Moeilijkheid en differentiatie
(vgl. ook Verhoeven en Beuk, 1983).

We willen hierover – niet systematisch en beslist niet uitputtend – een aantal opmerkingen maken.

Bij het criterium *relevantie* gaat het om de vraag of een item relevant is ten opzichte van wat men wil weten. Een vraag kan minder relevant zijn als bij het beantwoorden de leesvaardigheid een te grote rol speelt. Een voorbeeld hiervan gaven we al eerder (zie vraag 40). Een ander voorbeeld is:

(26)

Op een school met 800 leerlingen zitten 300 jongens.
De verhouding van het aantal jongens tot het aantal meisjes is

A. 3 : 8

B. 5 : 8

C. 3 : 11

D. 5 : 3

E. 3 : 5

Vaak vonden we een vraagstelling in een vorm welke minder bekend was aan de leerling. Hoewel dit geen pleidooi is voor het herkauwen van letterlijke vragen uit een boek, kan het geven van een vraag in andere vorm de intentie van de opgave veranderen. Vergelijk bijvoorbeeld:

(12)

Als $a = bc$ en als $a = 12$ en $b = 3$, dan is $c$ gelijk aan

A. $\frac{3}{4}$
B. 3
C. 4
D. 12
E. 36

met:

Gegeven: $a = bc$; $a = 12$; $b = 3$; $c =$

In het tweede geval gaat het om de vaardigheden 'kunnen substitueren' en 'het oplossen van een eerste graadsvergelijking'. In vraag 12 komt daar nog bij het kunnen analyseren wat gegeven is en wat gevraagd wordt!
En wat te denken van:

(14)

In welk van onderstaande antwoorden zijn de twee breuken van gelijke waarde?

A. $\frac{5}{8}$ en $\frac{2}{3}$
B. $\frac{5}{6}$ en $\frac{2}{3}$
C. $\frac{4}{5}$ en $\frac{14}{15}$
D. $\frac{3}{5}$ en $\frac{9}{15}$
E. $\frac{1}{2}$ en $\frac{14}{24}$

versus

$\frac{3}{5} =$ A. $\frac{13}{15}$
B. $\frac{12}{15}$
C. $\frac{8}{10}$
D. $\frac{9}{15}$

Wat denkt u van 'vraag'

(23)

De waarde van $2^3 \times 3^2$ is

A. 30
B. 36
C. 64
D. 72
E. Geen van bovenstaande antwoorden.

in vergelijking tot de 'opdracht' $2^3 \times 3^2 =$
En wat te denken van 'vraag'

(34)

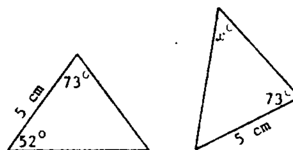
Wat is de wortel uit $12 \times 75$?

A. 6,25
B. 30
C. 87
D. 625
E. 900

Normaliter komen we meestal de 'opdracht' $\sqrt{12 \times 75}$ tegen.
We vragen ons bij deze laatste opgave trouwens af of het antwoord op vraag 34 niet $150\sqrt{3}$ moet zijn. Kennelijk zijn we het niet eens over wat het goede antwoord is. Deze vraag is dus niet objectief.

Een vraag is nl. *objectief* als experts (= leraren) hetzelfde alternatief aanwijzen. Een vraag kan niet objectief zijn doordat er meerdere goede alternatieven zijn, er juist geen goed alternatief is, of doordat de aangeboden informatie niet volledig is. Alle vragen waren objectief, behalve vraag 34 en vraag 6.

(6)




De bovenstaande driehoeken zijn congruent. De grootte van enkele zijden en hoeken is gegeven.
$x$ is gelijk aan

A. 52
B. 55
C. 65
D. 73
E. 75

Als men de gevraagde hoek met een geodriehoek meet, moet men kiezen voor alternatief A.
Een item is *specifiek* als alleen de persoon die de stof beheerst de vraag kan beantwoorden. Er mogen geen aanwijzingen voor de anderen inzitten. Zo zou vraag 35 minder specifiek zijn als het in de volgende vorm was gegoten.

(35) 847,36

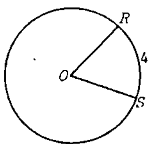
Het cijfer 6 in het getal in het hokje staat voor

A. $6 \times \frac{1}{100}$
B. $6 \times \frac{1}{10}$
C. $6 \times 1$
D. $6 \times 10$
E. $6 \times 100$

i.p.v.
A. $6 \times \frac{1}{100}$
B. $6 \times \frac{1}{10}$
C. $6 \times 1$
D. $6 \times 10$
E. $6 \times 100$

Vanwege de genoemde reden zijn ook vraag 32 en 9 minder specifiek.

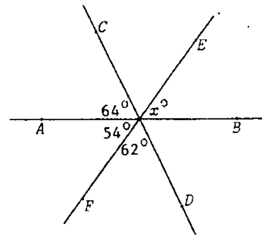
(32)




De omtrek van de cirkel met middelpunt $O$ is 24. De lengte van de boog $RS$ is 4.
Hoeveel graden is de middelpuntshoek $ROS$?

A. 24
B. 30
C. 45
D. 60
E. 90

(9)

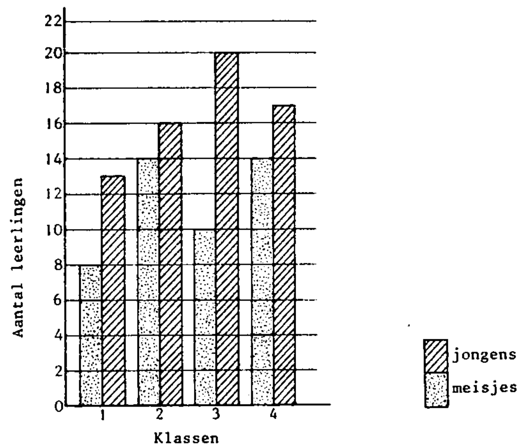



De rechte lijnen $AB$, $CD$ en $EF$ snijden elkaar zoals in de figuur is aangegeven. De grootte van enkele hoeken is gegeven.
$x$ is gelijk aan

A. 54
B. 62
C. 64
D. 126
E. 128

Alternatief E van 32 en de alternatieven D en E van 9 vallen direct af als men de tekening bekijkt. Leerlingen die 'het niet echt weten' hebben hierdoor een grotere kans op het juist antwoord.

(15) LEERLINGEN IN KLASSEN 1, 2, 3 en 4




Welk van de volgende beweringen over de informatie, die het diagram laat zien, is WAAR?

A. Klas 2 is de kleinste klas
B. In klas 2 en 4 zitten hetzelfde aantal leerlingen.
C. In klas 3 zitten twee keer zoveel jongens als meisjes.
D. In klas 4 zitten meer meisjes dan jongens.
E. In klas 1 zitten evenveel jongens als er meisjes in klas 4 zitten.

Een item is *efficiënt* als het alle benodigde informatie bevat en als de leestijd beperkt is. Anders gezegd, een item moet kort, duidelijk, eenvoudig en grammaticaal juist geformuleerd zijn. Items met

lange, niet direct nodige inleidingen, ontkenningen of dubbele ontkenningen, zijn niet efficiënt.
De items 7 en 15 (zie blz. 60 en 81) zijn o.i. niet efficiënt.
Gezien de achterliggende doelstellingen (resp. het kunnen tekenen en het kunnen interpreteren van een diagram) vinden we de tekst te uitgebreid.

Op de criteria *moeilijkheid* en *differentiatie* willen we hier niet ingaan. Dit hangt samen met het feit dat in de toets de meeste onderwerpen slechts éénmaal voorkomen en de moeilijkheidsgraad door andere factoren, zoals we reeds aangaven, vertroebeld kan worden.
Samenvattend menen we te kunnen stellen dat we twijfels hebben bij de uitkomsten van dit 'proefwerk'. Twijfels over in hoeverre het een juist beeld geeft van kennis en vaardigheden van leerlingen uit de tweede klas van het voortgezet onderwijs.
Nu kan men tegenwerpen dat het hier niet om een proefwerk gaat maar om een onderzoeksinstrument. Als men al duidelijk kan maken wat het verschil is tussen beide, ook vanuit het standpunt van de leerling, dan nog kan men de overeenkomsten tussen eisen voor een goed proefwerk en eisen voor een deugdelijk onderzoeksinstrument niet loochenen.

Tot slot nog dit. In ons land is het de gewoonte bij *wiskunde-proefwerken* open vragen te geven. De meeste docenten geven daarbij aan dat niet zozeer het antwoord, de uitkomst, belangrijk is maar de achterliggende redenering. Dit komt o.a. tot uiting in het feit dat men punten geeft voor een opgave waarvan het antwoord weliswaar fout is, maar waar toch goede stappen in de redenering zijn te onderscheiden. Analyse van de gegeven redeneringen geeft de docenten verder een adequater beeld van wat de leerlingen van de lessen hebben opgestoken dan analyse van de uiteindelijke antwoorden. Deze korte en globale typering van wiskundeproefwerken geeft *ons kernbezwaar* aan tegen het meten van onderwijseffecten door middel van meerkeuzevragen. De nadruk ligt bij meerkeuzevragen op wat een leerling *niet* kan, op mogelijke, kleine *fouten* die een leerling heeft gemaakt. Daarbij blijven de oorzaken van het falen buiten beeld, terwijl juist die een leerkracht inzicht geven in wat er veranderd moet worden.

Anders gesteld: *wat we in dit onderzoek missen zijn beschrijvingen van hoe leerlingen in tweede klassen van het voortgezet onderwijs met wiskunde omgaan en welke problemen ze daarbij hebben.*

Goede voorbeelden van wat we bedoelen vonden we in de Nieuwe Wiskrant 4, nr. 1 in een artikel van Nanda Querelle.
Als uitsmijter zonder verder commentaar een paar voorbeeldjes uit de praktijk van alledag, waarmee maar weer eens aangetoond is hoe heerlijk objectief toch optisch scoorbare toetsen zijn.

I $\{0\}$ is de oplossingsverzameling van:
A. $3x = 3x$
B. $-3x = 3x$
C. $3x = 3x + 1$
D. $-3x = 3x + 1$

Het merendeel van mijn nog onvoldoende in het vierkeuzeharnas passende leerlingen kiest voor A. Maar gelukkig, er zijn ook een paar B-stemmers, waaronder Rudy, voorwaar niet de slimste van het stel. Blij hem een goede beurt te kunnen laten maken, vraag ik: 'waarom B?'
'Nou gewoon, dat is de enige die nul is.'
'Ja en hoe wist je dat zo zeker?'
'Nou gewoon, bij A krijg je $3x + 3x = 0$, dat is fout en bij B $-3x + 3x = 0$ dus die is het, want die andere zijn ook fout.'

II De tangens van de hoek die de lijn $5x - 8y - 3 = 0$ maakt met de positieve $x$-as is:
A. $\frac{5}{8}$ B. $-\frac{5}{8}$ C. $\frac{8}{5}$ D. $-\frac{8}{5}$
Verklaring van Benno: 'A, want de hoogte is altijd minder dan de afstand en er stond positieve $x$-as.'

## Het gebruik van het TWP-materiaal in de lerarenopleiding

Kunnen we iets doen in de lerarenopleiding met de resultaten en werkwijze(n) van het TWP? Zeer zeker wel, zij het misschien anders dan de onderzoekers zouden verwachten.
Om onze ideeën over het gebruik toe te lichten geven we hierna kort een drietal momenten in de lerarenopleiding aan waar we intensief van het materiaal gebruik zullen maken.

Binnen de geherstructureerde MO-A-opleiding zullen we op twee manieren gebruik maken van met

name de leerlingentoetsen. Zoals wellicht bekend is, strekt de onderwijskundige voorbereiding (vakdidactiek en onderwijskunde) zich over de vier cursusjaren van de part-time opleiding uit. Onderdeel van de onderwijskundige voorbereiding, in het tweede jaar, is de schooloriëntatie. Doel hiervan is o.a. de studenten hernieuwd te laten kennismaken met het voortgezet onderwijs. Aandachtspunten daarbij zijn 'de leerling' en 'hoe de leerling met wiskunde omgaat/om kan gaan'. In dit verband zullen we gebruik maken van de leerlingen (kern)toets. Studenten van de opleiding moeten tijdens deze schooloriëntatie aan één of twee leerlingen deze toets afnemen. Daarbij staat dan niet centraal of leerlingen het goede antwoord weten maar hoe ze met een opgave omgaan: wát ze begrijpen en hóe ze een stuk wiskunde begrijpen[2].
In datzelfde tweede cursusjaar wordt ook aandacht besteed aan de problematiek van het opstellen van een proefwerk. Dit kan eventueel verduidelijkt worden door te kijken naar de kerntoets (opzet, vragen etc.). Een van de mogelijke series vragen daarbij kan dan zijn: welke doelstellingen worden m.b.v. deze items getoetst; zou je die doelstellingen ook met andere middelen kunnen toetsen, waarom zou je wel/niet voor meerkeuzevragen kiezen? Maar ook de vraag: wat toets je niet met deze items? Of: welke van de volgende aspecten van b.v. meetkunde komen in deze items aan bod (vormaspect; constructieaspect; topologisch aspect; transformatieaspect; taalaspect; logisch aspect; rekenaspect)[3]. Ook de vraag naar het gebruik van 'standaardtoetsen' versus 'eigen toetsen' zullen wij zeker niet vermijden.
Speciale aandacht zullen we besteden aan het taalgebruik in toetsen, bijvoorbeeld door te vergelijken het volgende item:

(17) $\frac{2}{5} + \frac{3}{8}$ is gelijk aan

A. $\frac{5}{13}$

B. $\frac{5}{40}$

C. $\frac{6}{40}$

D. $\frac{16}{15}$

E. $\frac{31}{40}$

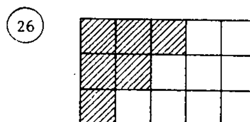
Met de vraag door Leen Streefland (OW & OC) voorgelegd aan vijfde klas leerlingen van een basisschool:

Vier bekers ijs van 1 liter elk stonden op een rijtje in de koelkast klaar voor een feestje. Na afloop van het feestje was de 1e beker leeg, de 2e en 3e half vol en de 4e driekwart vol.

a Hoeveel ijs is er opgegeten?
b Hoeveel ijs is er over?
c Hoe kun je je antwoorden op a en b controleren?

Het verschil in taalgebruik zullen we ook belichten door de studenten vraag 26 te laten vergelijken met de versie gehanteerd door Leen Streefland. Ook het meer subtiele onderscheid tussen vraag 26 en vraag 4 uit het Eerste Wiskunde Project willen we niet onvermeld laten.

(26)



In de figuur zijn de kleine vierkantjes allen even groot.
De oppervlakte van de gehele rechthoek is gelijk aan 1.
De oppervlakte van het gearceerde deel is gelijk aan

A. $\frac{2}{15}$

B. $\frac{1}{3}$

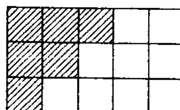
C. $\frac{2}{5}$

D. $\frac{3}{8}$

E. $\frac{1}{2}$

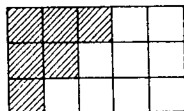
Vraag door Leen Streefland voorgelegd aan vijfde klas leerlingen van een basisschool:

Een plak chocolade bestaat uit 15 blokjes. De gearceerde blokjes zijn opgegeten.



a Welk deel van de chocoladereep is opgegeten?
b Welk deel van de chocoladereep is nog over?
c Hoe kun je de uitkomsten van a en b controleren?

In de onderstaande figuur zijn de kleine vierkantjes alle even groot. De oppervlakte van de gehele rechthoek is gelijk aan 1.



Het oppervlak van het gearceerde deel is:
A. $\frac{2}{15}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{3}{8}$ E. $\frac{1}{2}$

In de MO-B-opleiding en bij de opleiding aan de Rijksuniversiteit zullen we voornamelijk indirect gebruik maken van het verzamelde materiaal, bv. door de cursisten/studenten de volgende vraag voor te leggen[4]:
*Hoe bespreek je met brugklasleerlingen de stelling 'de som van de hoeken van een driehoek is 180°' ?*[5]
Na inventarisatie van de diverse aanpakken wordt gevraagd naar de motiveringen resp. achtergrondideeën. Dit laatste levert de mogelijkheid om – afhankelijk van het stadium van de opleiding – in te gaan op diverse aspecten en achtergronden van wiskunde-onderwijs zoals:

a doelstellingen (o.a. aspecten van meetkunde),
b leerstijlaspecten (m.n. veld(on)afhankelijkheid, rigiditeit en structureringstendentie),
c ontwikkelingspsychologie (fasen in de ontwikkeling; zone van naaste ontwikkeling) en
d leerpsychologie.

Onze ervaring – tot nu toe – leert ons dat er bij de hier genoemde derde gebruiksmogelijkheid van het materiaal een o.i. zeer belangrijk punt naar voren komt, nl. het feit dat alle cursisten/studenten door hun voorgaande kennismakingen met wiskunde-onderwijs een bepaalde kijk gekregen hebben op wat 'wiskunde' resp. 'wiskunde-onderwijs' is. Het doordenken hiervan is o.i. nodig om te kunnen komen tot een doordenking van wat wiskunde-onderwijs zou kunnen zijn.
Deze doordenking van wat wiskunde-onderwijs zou kunnen zijn levert een eerste aanzet tot een bezig blijven met de verbetering van dit onderwijs. Op deze manier kan het Tweede Wiskunde Projekt toch nog – zij het indirect – een bijdrage leveren aan de verbetering van het wiskunde-onderwijs in Nederland.

## Noten

1 Zoals gebruikelijk schrijven wij 'leraar', 'docent', 'hij'. Voor ons is het vanzelfsprekend dat daar ook 'lerares', 'docente', 'zij' zou kunnen staan.
2 Het eerder aangehaalde artikel '*Ach ja*' van Nanda Querelle uit de Nieuwe Wiskrant 4e jrg. nr. 1 én andere literatuur komt daarbij zeker ter sprake.
3 Koeno Gravemeyer en Jean-Marie Kraemer, *Met het oog op ruimte*, Zwijsen, Tilburg.
4 In het cursusjaar '84/'85 is dat reeds enkele malen gedaan: met als resultaat zeer levendige discussies, met vele leerzame momenten voor alle deelnemers.
5 Pag. 89-97 van *Aspecten van Meetkunde-Onderwijs deel III*, onderwerpen.

## Literatuur


Freudenthal, H., *Vierkeuzetoetsen Mavo-3*/lto-C Verontrustend!
In: Wiskrant 3 (1978), nr. 2, blz. 1-3
Freudenthal, H., *Driemaal is scheepsrecht. Meerkeuzetoetsen Mavo-3/lto-C*. In: Wiskrant 5 (1980), nr. 2, blz. 16-17
Freudenthal, H., *Cito-leerdoelgerichte toetsen*. In: Nieuwe Wiskrant 4 (1984), nr. 1, blz. 15-23
Gravemeyer, K. en Kraemer J. M., *Met het oog op ruimte*, Zwijsen Tilburg, 1984
Groot, A. D. en van Naerssen, R. F., *Studietoetsen. Construeren, afnemen, analyseren*, Den Haag, Mouton & Co, 1969
Hart, K. M. e.a., *Children's Understanding of Mathematics: 11 en 16*, John Murray (publishers), 1981
Mathematics Counts, Report of the Committee of Inquiry into the Teaching of Mathematics in Schools under the chairmanship of Dr. W. H. Cockcroft, London, 1982
Querelle, W. M. G., *Ach ja*. In: Nieuwe Wiskrant 4 (1984), nr. 1
Verhoeven, N. G. en Beuk, C. H., *Het construeren van meerkeuzevragen* Cito, Algemene publikatie nr. 29, Arnhem, 1983
Streefland, L., *Breuken*, Voordracht gehouden op de Panama conferentie te Noordwijkerhout, 15 oktober 1984
Wiegersma, S. en Groen, M., *Resultaten van wiskundeonderwijs*, Wolters-Noordhoff, 1968
Wittmann, Erich, *Grundfragen des Mathematikunterrichts*, Vieweg-Braunschweig, 1976


### *Over de auteurs:*


*Harrie Broekman is werkzaam als vakdidacticus en lerarenopleider aan het Pedagogisch-Didactisch Instituut voor de Lerarenopleiding (P.D.I.) van de Rijksuniversiteit Utrecht en aan de Centrale Opleidings Cursus voor Middelbare Akten (C.O.C.M.A.) te Utrecht.*

*Johan M. J. Weterings is werkzaam als vakdidacticus en onderwijskundige aan de Centrale Opleidings Cursus voor Middelbare Akten (C.O.C.M.A.) te Utrecht en het Nutsseminarium te Amsterdam.*

# Het IEA-Tweede Wiskunde Project: Wat nu verder?

*E. Warries, W. J. Pelgrum*

## Inleiding

Toen IEA in 1977 startte met het Tweede Wiskunde Project werd in Nederland door een groepje van wiskunde-onderwijs deskundigen, leerplanontwikkelaars, toetsdeskundigen en onderwijsbeleidsmedewerkers de mogelijkheid en wenselijkheid van een Nederlandse deelname aan dit onderzoek besproken.
Er waren op dat moment nogal wat twijfels, vanwege ervaringen die waren opgedaan met het Eerste Wiskunde Project, zoals vakinhoudelijke tekortkomingen en het geringe gebruik van de resultaten in wiskundekringen. Een 'bespreekgroep' van wiskundigen en onderwijskundigen concludeerde echter dat deze problemen in principe oplosbaar waren en dat de internationale opzet en organisatie van het project (met veel inbreng van wiskunde-onderwijs deskundigen) garanties boden voor een betere aansluiting van het onderzoek bij de wiskunde-onderwijspraktijk en het beleid.
Tijdens de uitvoering van het internationale onderzoek bleek dat een actieve inbreng van de Nederlandse onderzoekers, die gesteund werden door een kritische en produktieve nationale begeleidingscommissie, bijdroeg tot een onderzoeksopzet die voor ons land acceptabel was.
Hoewel het feitelijke eindprodukt van dit onderzoek gevormd wordt door internationale rapporten, beseften we dat een optimale toegankelijkheid van de verzamelde informatie in ons land alleen bewerkstelligd zou kunnen worden door ook nationale rapporten uit te brengen. Die eigen rapporten zouden naar het oordeel van de begeleidingscommissie toegankelijk moeten zijn voor uiteenlopende groepen lezers/gebruikers: docenten, lerarenopleiders, leerplanontwikkelaars, toetsconstructeurs, leerboekschrijvers en onderzoekers van het onderwijs.
Gezien de beperkte looptijd van het onderzoek in Nederland kon het gegevensmateriaal niet bewerkt en beschreven worden voor iedere afzonderlijke gebruikersgroep. Daarom werd gekozen voor een rapportageopzet die de garantie bood dat enerzijds de verzamelde gegevens toegankelijk zouden zijn en anderzijds voor zover de tijd beschikbaar was zou kunnen ingaan op het verder interpreteren van deze gegevens. Naast een *technisch rapport* over de opzet en uitvoering van het onderzoek werd een *beschrijving van de verzamelde* gegevens geleverd. Deze beschrijving werd vervolgens besproken met personen uit de verschillende gebruikersgroepen, die opvallende uitkomsten signaleerden en vragen stelden voor verdere analyse van het materiaal. Zo werden bijvoorbeeld bij het bespreken van de toetsresultaten met wiskundeleraren uit de verschillende schooltypen op onderdelen nogal tegenvallende uitkomsten gesignaleerd. Deze docenten vermoedden echter dat deze tegenvallers te maken zouden kunnen hebben met het leerboek dat door docenten in het onderzoek gebruikt werd.
Door dit soort besprekingen konden verschillende onderwerpen voor *nadere analyse* geïdentificeerd worden, die voor een deel werden uitgevoerd en gerapporteerd. Na afsluiting van het TWP konden we constateren dat weliswaar de geplande rapporten verschenen waren, maar dat nog steeds geen zicht was op de vraag of de gekozen rapportageopzet ook daadwerkelijk voldeed.
Om die reden werd na overleg met de redactie van Euclides besloten de rapporten toe te sturen aan personen (totaal 13) uit de verschillende gebruikersgroepen en deze te verzoeken om op de inhoud en gebruikswaarde vanuit hun eigen beroepsactiviteiten en interesse te reageren.
Het resultaat is een serie interessante artikelen, waarop we in deze bijdrage willen reageren. Gezien de aard van de commentaren lijkt het ons goed om allereerst nog iets te zeggen over het doel en de mogelijke functie van het onderzoek en vervolgens vanuit dat kader in het kort in te gaan op het geleverde commentaar. Als afsluiting van onze reactie zullen we tenslotte ingaan op de verdere mogelijkheden voor het gebruik van de verzamelde gegevens.

## Doel en functie van het TWP

De maatschappelijke functie van onderwijsonderzoek is het bijdragen aan het verbeteren van het onderwijs. Dit doel kan onder meer nagestreefd worden door inzicht te verschaffen in het feitelijk functioneren van het onderwijs. Onderwijsonderzoekers doen dit op vele manieren, bijvoorbeeld door zich te verdiepen in leerprocessen, na te gaan waarom bepaalde groepen leerlingen problemen hebben of te bestuderen of bepaalde beleidsmaatregelen succes hebben. Dit type onderzoek is meestal gericht op vrij nauw omschreven vraagstellingen, die doorgaans in een beperkte setting worden onderzocht, waarbij de resultaten aan een bepaalde groep gebruikers wordt gerapporteerd en conclusies of aanbevelingen worden opgesteld waarop verdere maatregelen gebaseerd kunnen worden. Hoewel geconstateerd kan worden dat mogelijke maatregelen veelal achterwege blijven, betekent dit geenszins dat het onderzoek op zich slecht was maar hoogstens dat de functie van onderzoek in het onderwijsbeleidsproces (en dat is ook beleid op schoolniveau) nog niet goed uitgewerkt is.
Een apart type onderzoek (waartoe het TWP behoort) waarvan de betekenis voor beleid en praktijk langzamerhand toeneemt, is het 'vergelijkende stand van zaken' onderzoek, dat primair gericht is op een zo nauwkeurig mogelijke beschrijving van de feitelijke situatie van ons onderwijs. Het is een type onderzoek dat vergelijkbaar is met het onderzoek dat het CBS verricht, met dien verstande dat geen 'boekhoudkundige' gegevens (leeftijd, aantallen docenten, etc.) verzameld worden, maar eerder de onderwijsinhoud en opbrengsten centraal staan. Door een goede registratie van hoe het onderwijs functioneert, ontstaat een plaatje dat door beleidsmakers en praktijkmensen bekeken kan worden, waarin merkwaardige of onacceptabele details zullen opvallen die men zou willen wegwerken of nader bestuderen. Dit betekent dat het doel van dit onderzoek voor de onderzoekers moet zijn: een zo nauwkeurig mogelijke registratie van de stand van zaken, rekening houdend met vraagstellingen die daaruit voort kunnen komen.
In het inleidende artikel (Vredenduin) is beschreven, hoe de registratie van de stand van zaken in het onderzoeksproject gestalte kreeg. Daarin werd ook aangegeven dat er vele contextgegevens verzameld werden. Het zijn juist deze contextgegevens die nadere analyses ten behoeve van bepaalde vraagstellingen mogelijk moeten maken. Het spreekt voor zich dat een onderzoeksopzet voor een internationaal project als het TWP niet op recept te leveren is, omdat vooral die nadere vraagstellingen sterk afhankelijk zijn van maatschappelijke of politieke aandachtspunten, die verschillen tussen landen en in de tijd: zo was er ten tijde van het Eerste Wiskunde Project in ons land nog geen Mammoetwet, geen uitzicht op een mogelijke middenschooldiscussie en geen sterke aandacht voor verschillen tussen jongens en meisjes. Wat de verschillen tussen landen betreft: uit de uiteindelijke opzet en uitvoering van het TWP-onderzoek blijkt dat de internationale commissie gezocht heeft naar een evenwicht tussen verschillende onderzoeksvragen. Andere aandachtspunten brengen ook mee dat dit soort onderzoek in principe een cyclische gang heeft die zich op twee manieren uit, namelijk wat betreft resultaten en de onderzoeksopzet. Qua resultaten kan nagegaan worden in hoeverre maatregelen succes hebben gehad (bijv.: heeft de Mammoetwet een verbetering bewerkstelligd?), maar ook kunnen voor toekomstige projecten naar aanleiding van ervaringen met vorige, verbeteringen in de opzet gerealiseerd worden, wat bijv. in de ontwikkelingen van IEA-onderzoeken goed te zien is: er komen steeds meer mogelijkheden om de internationale onderzoeksopzet uit te breiden met specifieke vragen die *binnen* bepaalde landen leven.

Uiteindelijk moet deze cyclische gang ertoe leiden dat een steeds meer verfijnde techniek ontstaat om dit type onderzoeksproject af te stemmen op de informatiebehoeften van potentiële gebruikers.

## Commentaren op het TWP

De voorgaande artikelen over de Nederlandse eindrapporten van het TWP bevatten veel interessante gezichtspunten en originele bijdragen. Wat ons vooral opviel is dat geïllustreerd wordt dat de onderzoeksgegevens aanknopingspunten bieden voor deskundigen die zich vanuit zeer uiteenlopende optieken met ons wiskunde-onderwijs bezig houden. We geven hieronder enkele commentaren kort weer en plaatsen daar enkele opmerkingen bij.

*Schuring* heeft het materiaal voor eigen doeleinden al enigszins bewerkt en wijst op veranderingen tussen 1963 en 1981. Hoewel de vergelijking in de tijd, gezien de verschillen tussen EWP en TWP wat problematisch zijn, laat ook zijn voorzichtige benadering interessante resultaten zien. Daarnaast toont hij ook dat het materiaal aanknopingspunten bevat om een betere afstemming tussen leerplannen van basisschool en voortgezet onderwijs te beargumenteren.

*Solberg* stelt dat de onderzoeksresultaten ons tot nadenken kunnen stemmen en op ideeën kunnen brengen over mogelijkheden van verbetering in het wiskunde-onderwijs. Met zijn conclusie dat dat mogelijk is door het uitvoeren van vergelijkingen (in de tijd, maar ook tussen schooltypen en landen) zijn we het van harte eens. Zijn pleidooi om naar aanleiding van de GTL-analyses het gebruik van voortgangstoetsen in het voortgezet onderwijs te overwegen stemt zeker tot nadenken.

*Verweij* mist (terecht) een aantal zaken in het deelonderzoek meetkunde, maar vindt er tevens aanknopingspunten in voor nader onderzoek, zoals de rol van de opleiding van leraren en de verschillen tussen jongens en meisjes in het meetkunde-onderwijs. Interessant is dat de door haar gesignaleerde vraagpunten niet in de speciale bespreekgroep meetkunde werden opgeworpen. Dit illustreert dat inbreng van wiskundigen in bespreekgroepen globaal gezien wel een belangrijke variant in het onderzoek kunnen opleveren, maar dat daarmee nog niet alle specifieke vragen beantwoord zijn. Overigens kan gesteld worden dat een deel van de vragen door nadere analyse van het materiaal te beantwoorden zijn. Zo onderzoekt de groep 'Vrouwen en Wiskunde' of het materiaal zich leent voor een secundaire analyse.

*Breeman* vindt in het onderzoek een bevestiging van zijn opvatting dat de opleiding van leraren niet optimaal afgestemd blijkt op veranderingen in het onderwijs, en illustreert dat met de verwijzing naar een aantal tabellen. Op deze wijze laat hij zien hoe met bepaalde argumenten de discussie over de inrichting van onderwijs met behulp van empirische gegevens te onderbouwen is, maar ook wat de belangrijke rol van een lerarenopleiding is.

*Broekman en Weterings* stellen vragen over de getoetste doelstellingen naar aanleiding van hun verhandeling over het gebruik van TWP-items voor proefwerken en toetsen. Deze vragen verwijzen indirect naar een al decennia lange discussie over toetsmethodologie, maar ook naar een onderscheid tussen diagnostisch en evaluatief toetsen. Lee J. Cronbach verwoordde het gebruik van toetsen in het onderwijs goed door te stellen dat het er om gaat vast te stellen hoe generaliseerbaar toetsresultaten zijn: het gaat er *niet* om vast te stellen of leerlingen bepaalde specifieke vaardigheden bezitten (zoals het oplossen van een bepaald soort opgave), maar *wel* om de vraag in hoeverre kennis en vaardigheden beheerst worden in een specifiek *domein*. Als je dat wilt toetsen, moet je opgaven voorleggen die een willekeurige steekproef zijn uit het geheel van mogelijke opgaven. Dat betekent ook dat je bevindingen niet toetsspecifiek moeten zijn: bij een geheel andere steekproef van toetsitems zou je in zekere zin dezelfde resultaten moeten vinden.
Dit is precies wat in het TWP is nagestreefd: de itemverzameling is op te vatten als een steekproef uit mogelijke toetsitems, hetgeen betekent dat een andere verzameling dezelfde (relatieve) resultaten te zien zou hebben gegeven. Dit betekent dat docenten de toetsen *wel* kunnen gebruiken om de relatieve positie van hun leerlingen/klas vast te stellen (vergelijkingsmateriaal staat in de rapporten) maar *niet* om na te gaan of hun specifieke doelen gerealiseerd zijn.
Overigens vinden we het jammer dat kennelijk door de auteurs in eerste instantie geen aanknopingspunten zijn gevonden in het materiaal om gebieden te identificeren waarop ontwikkelingsactiviteiten ter verbetering van de wiskundedidactiek ontplooid zouden kunnen worden, hoewel we vermoeden dat het voorgestelde gebruik in de oriëntatiefase van de lerarenopleiding hier eventueel wel aanleiding toe zou kunnen geven.

## Wat nu verder?

Uit mondelinge en de hier behandelde schriftelijke reacties op de Nederlandse eindrapportering over het Tweede Wiskunde Project blijkt dat er behoefte bestaat aan het soort informatie wat geleverd

wordt. Dat geeft de onderzoekers de moed om, in overleg met de mensen uit het onderwijs, door te gaan met nieuwe onderzoeksplannen.
Het internationale karakter van die plannen geeft een extra waarborg voor een constante bewaking van de kwaliteit van het onderzoek, zowel wat de methodiek als wat de relevantie van vraagstellingen betreft. Gelukkig heeft het internationale overleg ons de laatste jaren geleerd dat onze inbreng op waarde wordt geschat en tot veranderingen in opzet en uitvoering kan leiden.
Daarom is het wellicht goed dit stuk te beëindigen met enkele conclusies die wij hebben getrokken uit de geleverde commentaren. Als het goed is moet uit die conclusies de overtuiging doorklinken van de onderzoekers dat toekomstig onderzoek alleen maar beter kan worden als de open gedachtenwisseling met de gebruikers ervan bewaard blijft.

I Het interpreteren van onderzoeksresultaten blijft een zaak die de onderzoekers in eerste instantie zullen overlaten aan beleidsmakers en de mensen uit de praktijk van het onderwijs.
Dat het geven van verklaringen voor gevonden verschijnselen vaak een voorlopig of een persoonlijk karakter heeft, zal de lezer met ons eens zijn. Des te meer is het zaak, dat vele deskundigen hierover hun mening kunnen geven. In andere landen leiden de nationale rapporten wel eens tot openbare presentaties van de rapporten of tot studiebijeenkomsten over de resultaten.

II De gebruikersvriendelijkheid van de rapportering kan altijd verbeterd worden. Wij hebben ons als onderzoekers gerealiseerd dat het best mogelijk was geweest om in de beschrijving van de onderzoeksopzet aan te geven hoe kostbaar observaties geweest zouden zijn en waarom wij daarvan hebben afgezien. Zo hadden wij ook aandacht kunnen geven aan onze beslissing niet het oplossingsproces dat zich in het hoofd van de leerling afspeelt te onderzoeken, maar wel het resultaat van dat proces.

III Het stellen van de goede onderzoeksvragen is een zaak van wisselwerking. We hebben hierboven gesproken van een cyclisch proces. Vooroverleg in een volgend project en met een andere nationale begeleidingscommissie zal wellicht leiden tot nieuwe vragen. Waarom zouden we niet beter naar onze leerboeken kijken? Of naar de invloed van veranderingen in de bovenbouw in vwo en havo? Niet alle vragen zijn onderzoekbaar, maar vele zijn het wel, als we het geld en de tijd er voor over hebben. In dit internationale onderzoek kunnen vragen als nationale optie meegenomen worden en ze kunnen dan ook nog leiden tot overname door andere landen, hetgeen tot een verdieping van de probleemstelling kan leiden.

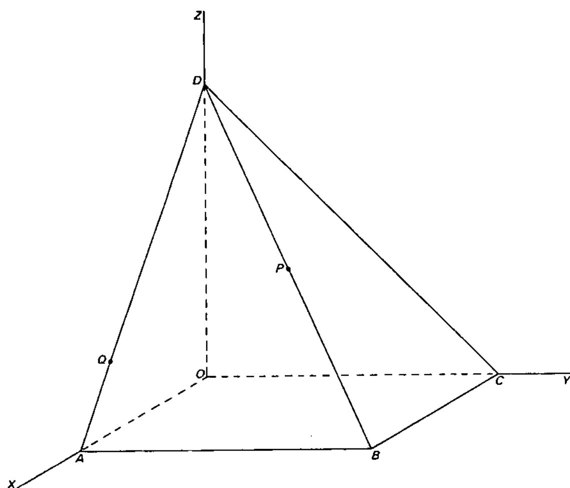
IV Dikwijls bevat het thans verzamelde en reeds in het Steinmetz-archief opgeslagen materiaal vele mogelijkheden om vragen in secundaire analyses te beantwoorden. Van praktisch belang daarbij is uiteraard dat vraagstellers die iets meer willen weten over de verbanden, niet altijd zelf de deskundigheid bezitten om het betreffende onderzoek uit te voeren. In zulke gevallen hebben in het verleden universitaire onderzoekers die hun maatschappelijke taak op die manier wilden concretiseren echter vaak de helpende hand geboden.

V Methodische verbeteringen in opzet en uitvoering van onderzoekingen behoren standaard te zijn in het wetenschappelijk bedrijf. Die verbeteringen komen als vanzelf tot stand door ontwikkelingen in de methodologie van het sociaalwetenschappelijk onderzoek en door steeds grotere mogelijkheden van data-analyse met computers. Maar het begrippenapparaat van de onderwijsresearch is ook aan ontwikkelingen onderhevig. Zo is er nog steeds voortgang in de operationalisering van het belangrijke begrip 'Gelegenheid om te Leren', waarbij onze commentatoren terecht nog vraagtekens zetten. We mogen aannemen dat de vernieuwingen in de methodologie die zich de laatste twintig jaar hebben gemanifesteerd zullen doorzetten. Er is nog veel te verbeteren en dat zal mede beïnvloed worden door de kritiek van gebruikers.

VI Uit de reacties op de Nederlandse rapportering is af te leiden dat er zeker interesse zal bestaan voor vergelijkbare gegevens uit andere landen. Hopelijk dit jaar nog zal het internationale vergelijkende rapport verschijnen. Nationale rapporten zijn ook al verschenen in Zweden, Japan en in de Canadese provincie British Columbia. Het is te overwegen om aan de inhoud van de verschenen en nog te verschijnen rapporten ook in ons land meer bekendheid te geven.

# Examen vwo wiskunde B 1985, 2e periode

De opgaven 1, 2 en 4 zijn identiek aan die van het wiskunde I examen.
opgave 3:




Ten opzichte van een rechthoekig assenstelsel $Oxyz$ zijn gegeven de punten $A(8,0,0)$, $B(8,8,0)$, $C(0,8,0)$ en $D(0,0,8)$.
Deze punten zijn hoekpunten van de vierzijdige piramide $D.ABCO$.
Punt $P$ is het midden van de ribbe $BD$ en punt $Q$ ligt op de ribbe $AD$ zo dat $AQ:QD = 1:3$.
$V$ is het vlak door $P$, evenwijdig aan de lijn $BQ$ en evenwijdig aan de lijn $DO$.

a Teken in bijgevoegde ruimtefiguur de doorsnede van $V$ met de piramide.
Geef daarbij een korte toelichting.
Stel een vergelijking op van $V$.

Een bol met middelpunt $O$ en straal $OQ$ snijdt de lijn $CD$ in de punten $E$ en $F$.

b Teken in bijgevoegde ruimtefiguur de doorsnede van deze bol met het vlak $x = 0$.
Bereken $EF$.

c Onderzoek hoeveel punten deze bol met de lijn $BD$ gemeen heeft.

# Examen vwo wiskunde A 1985, 2e periode

1 Van een diersoort A is het aantal exemplaren in een zeker gebied op het tijdstip $t$ gelijk aan $a_t$.
Eén jaar na het tijdstip $t$ is het aantal dieren $a_{t+1}$.

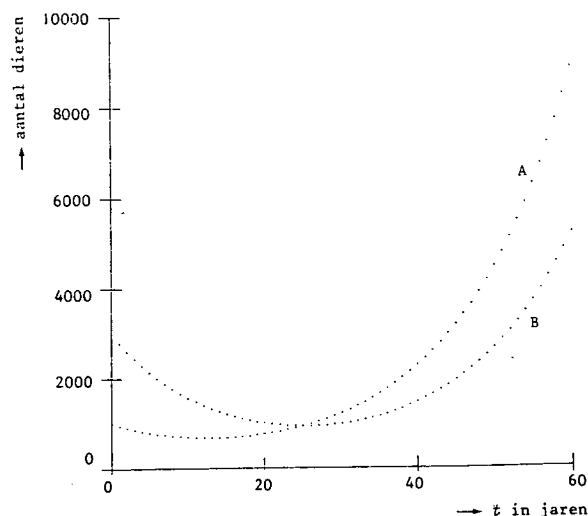
a Er is gegeven: $a_{t+1} = 1{,}1 \cdot a_t$ voor elk tijdstip $t$.
Op 1 januari 1985 zijn er 1000 dieren van soort A.
Op 1 januari van welk jaar zijn er voor het eerst meer dan 2000 dieren van soort A?
In een ander gebied wordt het aantal dieren van soort A beïnvloed door de aanwezigheid van een tweede diersoort B.
De wederzijdse beïnvloeding van de aantallen van beide soorten A en B wordt beschreven met het volgende model:

$$\begin{pmatrix} a_{t+1} \\ b_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}10 & -0{,}05 \\ 0{,}10 & 0{,}90 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_t \\ b_t \end{pmatrix}$$

Hierbij zijn $a_t$ en $b_t$ achtereenvolgens de aantallen dieren van de soorten A en B op het tijdstip $t$ en $a_{t+1}$ en $b_{t+1}$ achtereenvolgens de aantallen dieren van de soorten A en B één jaar later.
Op het tijdstip $t = 0$ zijn er 1000 dieren van A en 3000 van B.

b Bereken het aantal dieren van soort A en het aantal dieren van soort B na 1 jaar en na 2 jaar.
Met behulp van een computer zijn de aantallen dieren van A en B voor de 60 jaar volgende op $t = 0$ voorspeld. De resultaten zijn getekend in de grafiek op pagina 90.

c Bereken $\frac{a_t}{b_t}$ in één decimaal nauwkeurig met behulp van deze grafiek na 50 jaar, na 55 jaar en na 60 jaar.




d Het blijkt dat $\frac{a_t}{b_t}$ nagenoeg constant wordt.
Bereken die constante met behulp van de gegeven matrix, uitgaande van $\frac{a_{t+1}}{b_{t+1}} = \frac{a_t}{b_t}$.

e Teken in één grafiek het verband tussen de aantallen van beide diersoorten.
Zet op de horizontale as het aantal A-dieren en op de verticale as het aantal B-dieren uit. Neem de meetpunten om de 10 jaar.

f Voor $t \geqq 50$ groeien de diersoorten A en B bij benadering exponentieel. Bereken in twee decimalen nauwkeurig de groeifactor voor elk van beide diersoorten.

2 Een pensioenfonds gaat een bedrag ter waarde van 30 miljoen gulden beleggen in aandelen, obligaties en onroerend goed.
De regels die in acht worden genomen, zijn:
- er moet ten minste 3 miljoen gulden in elk van de drie bovengenoemde categorieën worden belegd;
- ten minste de helft van het totale bedrag moet worden geïnvesteerd in aandelen en obligaties;
- het bedrag dat voor aandelen wordt besteed mag niet het dubbele van het bedrag aan obligaties overschrijden.

De verwachte jaarlijkse opbrengst van aandelen is 8% van het hierin geïnvesteerde bedrag; voor obligaties en onroerend goed zijn deze percentages achtereenvolgens 7% en 9%.
Noem de bedragen in miljoenen guldens die worden belegd in aandelen en obligaties achtereenvolgens $x$ en $y$.

a Druk de verwachte totale jaarlijkse opbrengst op aandelen, obligaties en onroerend goed uit in $x$ en $y$.

b Aan welke voorwaarden moeten $x$ en $y$ voldoen op grond van bovenstaande regels?

c Teken in een rechthoekig assenstelsel $Oxy$ het gebied dat overeenkomt met de in b gestelde voorwaarden.

d Bij welke verdeling van het bedrag van 30 miljoen over aandelen, obligaties en onroerend goed is de verwachte opbrengst van het fonds maximaal?
Bereken de maximale opbrengst.

e Bij een verandering van de opbrengst percentages kan een andere verdeling van het te beleggen bedrag optimaal zijn, dat wil zeggen een maximale opbrengst geven.
De jaarlijkse opbrengst van aandelen kan veranderen.
Stel dat de jaarlijkse opbrengst van aandelen $p$% is van het hierin geïnvesteerde bedrag. De jaarlijkse opbrengst van obligaties en onroerend goed blijft onveranderd.
Bereken $p$ in het geval dat er meer dan één optimale verdeling van het te beleggen bedrag mogelijk is.
Bereken voor de gevonden waarden van $p$ de maximale opbrengst.

3 Op 9 november 1965 viel de stroom uit in New York City, een storing die 24 uur duurde: 'the great Black Out'. Negen maanden later schreven de kranten over een geboorte-explosie in New York.
Onderstaande tabel vermeldt het aantal geboorten per dag in New York gedurende de periode van 270 tot 290 dagen na the Great Black Out, in augustus 1966.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| do | 4 | 448 | zo | 14 | 377 |
| vr | 5 | 466 | ma | 15 | 451 |
| za | 6 | 377 | di | 16 | 497 |
| zo | 7 | 344 | wo | 17 | 458 |
| ma | 8 | 448 | do | 18 | 429 |
| di | 9 | 438 | vr | 19 | 434 |
| wo | 10 | 455 | za | 20 | 410 |
| do | 11 | 468 | zo | 21 | 351 |
| vr | 12 | 462 | ma | 22 | 467 |
| za | 13 | 405 | di | 23 | 508 |

Het gemiddelde aantal geboorten per dag dat over deze periode ongeveer 435 bedraagt, blijkt echter niet zoveel hoger te liggen dan het gemiddelde over het jaar 1966 dat 430 bedraagt.

a Neem aan dat het aantal geboorten per dag in New York over het gehele jaar 1966 redelijk constant is. Laat zien dat het aantal dagen in de periode van 4 tot en met 23 augustus 1966 waarop het aantal geboorten boven het jaargemiddelde van 430 ligt, niet significant hoog is. Neem een significantieniveau van 5 %.

b In de 20 dagen voorafgaande aan 4 augustus 1966 bleek op zoveel dagen het aantal geboorten kleiner te zijn dan 430, dat men van een significante afwijking kan spreken bij een significantieniveau van 5 %.
Op ten minste hoeveel dagen was er sprake van een aantal geboorten beneden het jaargemiddelde?

c Het aantal geboorten per dag op de drie zondagen in de periode van 4-23 augustus 1966 is kleiner dan 379.
Men wil onderzoeken of het aantal geboorten op zondag opvallend laag is. Neem aan dat het aantal geboorten per dag in New York normaal is verdeeld met een gemiddelde van 430 en een standaarddeviatie van 40 in de 50 weken die volgen op de periode van 4-23 augustus 1966.
Toon aan dat in twee decimalen nauwkeurig de kans dat op een willekeurig gekozen dag het aantal geboorten kleiner dan 379 is, gelijk is aan 0,10. In de 50 weken die volgen op de periode van 4-23 augustus 1966 blijken er 10 zondagen te zijn met een aantal geboorten kleiner dan 379.
Is het aantal zondagen met een aantal geboorten kleiner dan 379 significant hoog? Neem een significantieniveau van 3 %.

d Neem aan dat het aantal geboorten per dag in New York in 1986 normaal verdeeld zal zijn met een gemiddelde van 480 en een standaarddeviatie van 40.
Bereken het verwachte aantal dagen in 1986 waarin het aantal geboorten tussen 450 en 490 zal liggen.

e Het aantal inwoners van New York bedroeg op 1 januari 1966 ongeveer 14,1 miljoen. Neem aan dat door migratie en sterfte het aantal inwoners jaarlijks met 0,5 % afneemt. Neem verder aan dat elk jaar na 1966 het percentage geboorten, uitgedrukt in procenten van het aantal inwoners, constant is.
Schat het aantal inwoners van New York op 1 januari 2000.

# Verslag van het verenigingsjaar 1 augustus 1984-31 juli 1985

Het bestuur was dit jaar als volgt samengesteld: voorzitter dr. Th. J. Korthagen, secretaris drs. J. W. Maassen, penningmeester F. F. J. Gaillard, overige leden L. Bozuwa, dr. J. van Dormolen, C. Th. J. Hoogsteder, M. Kindt, F. Mahieu en mevr. drs. N. C. Verhoef.

Op zaterdag 27 oktober werd de jaarvergadering gehouden in het gebouw van de SOL te Utrecht. Deze jaarvergadering werd gecombineerd met een studiedag, die verzorgd was door de werkgroep 'Vrouwen en Wiskunde'. Het thema van die dag was 'Vrouwen en Wiskunde'. De aanwezigen op deze studiedag konden deelnemen aan één of meer van de volgende werkgroepen:
Samenwerken en observeren, Wiskunde een vrije keus?, Volwassenenonderwijs, Informatica, Leerstijlen, Hewet, Leerboeken en lesmateriaal. Tevens hield mevr. Ria Jaarsma een lezing met als onderwerp: 'Wiskunde, geen vak voor meisjes?'.
Veel leden waren aanwezig, de presentielijst werd getekend door 223 aanwezigen.

Op zaterdag 23 maart hielden de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraars hun tiende gemeenschappelijke studiedag in Kapellen in België. Op deze bijeenkomst werden de volgende voordrachten gehouden:
'Semantische en axiomatische wiskunde met betrekking tot het onderwijs' door dr. P. G. J. Vredenduin; 'Het aanbrengen van het continuïteitsbegrip' door Rik Verhulst en 'Wiskunde en biologie' door prof. dr. F. van der Blij.

Op 7 en 10 mei vonden examenbesprekingen plaats voor wiskunde lbo-C, mavo-C en mavo-D in 21 plaatsen, voor wiskunde havo in 5 plaatsen, voor wiskunde-I vwo in 5 plaatsen en voor wiskunde-II vwo in Utrecht.

De keuzeproblematiek wiskunde A en/of B bij de invoering van het nieuwe HEWET-programma leidde tot vele activiteiten. Op 20 september vergaderde ons bestuur hierover met het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Schooldecanen. Op 14 en 17 januari organiseerde onze vereniging in Amsterdam, Apeldoorn, Bergen op Zoom, Heerenveen, Roermond en Rotterdam bijeenkomsten met als thema 'De keuzeproblematiek in 4 vwo

in verband met de invoering van de nieuwe examenprogramma's wiskunde, algemeen bekend als HEWET'. Op deze bijeenkomsten werd onder de aanwezigen een bundel verspreid waarin ervaringen en strategieën van diverse scholen zijn beschreven. Circa 500 docenten waren op deze bijeenkomsten aanwezig.
Op diverse regionale bijeenkomsten van schooldecanen was de vereniging vertegenwoordigd om ook met de schooldecanen van gedachten te wisselen over de keuzeproblematiek.
In januari verscheen de op verzoek van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren samengestelde bundel 'Opgaven Wiskunde A vwo', terwijl een bundel 'Opgaven Wiskunde B vwo' ter perse is.

De op 1 februari 1984 ingestelde werkgroep ter voorbereiding van het eindexamenprogramma wiskunde havo bracht op 21 juni haar interimrapport uit aan de staatssecretaris van onderwijs.

Het bestuur zond diverse brieven aan de staatssecretaris van onderwijs, mevr. drs. N. Ginjaar-Maas. In een brief van 31 augustus reageerde ons bestuur op het voornemen van de staatssecretaris om wiskunde als examenvak verplicht te stellen op het vwo. In een brief van 1 december reageerde ons bestuur op het voornemen van de staatssecretaris dat maximaal 30% van het centraal schriftelijk eindexamen voor lbo en mavo uit open vragen kan bestaan. Tevens vroeg het bestuur in deze brief de aandacht voor het 'Verslag Werkgroep lbo/mavo-examens', zoals gepubliceerd in Euclides (58e jaargang nr. 1). In een brief van 10 januari vroeg het bestuur de staatssecretaris te bevorderen dat op korte termijn werkgroepen worden ingesteld om nieuwe leerplannen voor basisschool, mavo/lbo en onderbouw vwo/havo te ontwerpen.

In augustus vergaderden de besturen van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren en de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken/Wiskunde Onderwijs gezamenlijk om te komen tot een nauwere samenwerking. Het eerste tastbare resultaat van deze samenwerking was de oprichting van een 'Werkgroep reken-wiskundeprogramma 10-14 jaar'. In mei toonde deze werkgroep het resultaat van haar werk in een rapport aan de besturen van beide verenigingen.

Met het Landelijk Werkverband Nascholing Wiskunde is ons bestuur in bespreking om naast de landelijke cursussen te komen tot regionale aktiviteiten.

De 'Werkgroep Vrouwen en Wiskunde' hield dit jaar haar landelijke dag op 30 maart. In oktober verscheen van deze werkgroep de publikatie 'VrouWiskundig'.

De didactiekcommissie startte dit jaar met een werkgroep 'Hewet in de onderbouw', die zich bezig houdt met de invloed die het HEWETprogramma zal kunnen en moeten hebben op de onderbouw.
Dit jaar startte ook een werkgroep die zich bezig gaat houden met de problemen en knelpunten bij wiskunde in het volwassenenonderwijs.

Het beheer van de Leesportefeuille, dat jarenlang voortreffelijk in handen van de heer A. Hanegraaf was, is per 1 januari overgenomen door de heer F. M. W. Doove.

In de redactie van Euclides deden zich enige veranderingen voor. De heer W. Kleijne verlaat de redactie in verband met zijn benoeming tot inspecteur v.o.; mevr. H. Suzijn-van Zaale beëindigde haar werkzaamheden als eindredacteur, doch blijft in de redactie, terwijl tot nieuwe eindredacteur is benoemd de heer A. Oosten.

De nauwe samenwerking met de Vlaamse Vereniging van Wiskundeleraars uitte zich ook dit jaar onder andere in de gemeenschappelijke bestuursvergadering in september, de gemeenschappelijke studiedag in maart en bezoeken aan elkaars bijeenkomsten.

Het bestuur vergaderde dit jaar elf maal, waaronder eenmaal met de inspecteurs J. Boersma en drs. B. J. Westerhof.

# Studiedag

## van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren op zaterdag, 26 oktober 1985. (Agenda Jaarvergadering in Nr. *61,1*)

Het thema van de studiedag is dit jaar: VOORBEELDEN IN HET WISKUNDEONDERWIJS. Zoals elk jaar kan men zowel 's morgens als 's middags deelnemen aan een werkgroep, ditmaal te kiezen uit acht. Elke werkgroep herhaalt, bij voldoende de belangstelling, in de namiddag het programma van de morgen.

Direct na de lunch zal Prof. Dr. J. van de Craats een lezing houden, getiteld *Voorbeelden en tegenvoorbeelden*. Hij geeft daarover de volgende samenvatting:
Voorbeelden in de wiskunde. Zijn ze er alleen maar om de theorie te illustreren; om bewijzen begrijpelijker te maken of om technieken te demonstreren? Met andere woorden: hangen ze er zo'n beetje als versierselen bij, alleen maar bedoeld om de wiskunde minder droog en onverteerbaar te maken?
Of spelen ze een veel belangrijker rol. Zijn voorbeelden niet vaak het uitgangspunt van waaruit wiskunde wordt ontdekt en gecreëerd. Is de *inductieve* kant van de wiskunde, het opsporen van algemene wetmatigheden en structuren vanuit concrete voorbeelden, niet minstens zo belangrijk als de deductieve kant, het bewijzen van stellingen?
Natuurlijk is bij dat inductieve proces voorzichtigheid geboden. Overal zijn voetangels en klemmen. De geschiedenis zit vol 'bewijzen' waar fouten in bleken te zitten. En hoe kwam men die op het spoor? Inderdaad, via een *tegenvoorbeeld*.
Voorbeelden en tegenvoorbeelden – ze vormen onmisbare bestanddelen van de wiskunde, niet alleen in het onderzoek, maar evenzeer in het onderwijs. We zullen dit proberen te illustreren – u raadt het al – aan de hand van enkele welgekozen *voorbeelden*.

De werkgroepen, waaruit men kan kiezen, zijn de volgende:

1 *Aansluiten bij de ervaringswereld* (Conny Gaykema, Anna Tessel, Marg Vroomen, Sylvia van der Werf)
Instapproblemen dienen om de interesse van leerlingen voor een bepaald probleem op te wekken en begeleiden het bij het verkennen ervan (sorteerfase). Hierbij is het van belang aan te sluiten bij de ervaringswereld van elke leerling: dit brengt de noodzaak van afwisseling met zich mee. Dit geldt ook voor voorbeelden en toepassingen: wat de ene leerling aanspreekt kan voor anderen onherkenbaar zijn.
Na kennismaking en inleiding werken de deelnemers in groepjes met een experimenteel pakketje lesmateriaal, ontwikkeld door Anna Tessel en Sylvia van der Werf. Dit wordt gevolgd door een plenaire discussie voor het bespreken van ervaringen, gelegenheid voor het geven van kritiek en eventuele suggesties voor verbetering van het pakket.

2 *Gebruik van wiskunde bij andere vakken* (Thea de Poel)
Aansluitproblemen die leerlingen ervaren bij het toepassen van vaardigheden die ze bij wiskunde geleerd hebben, treden veelal op een 'lager niveau' op dan zijzelf, hun wiskundeleraren of de docenten van andere vakken zich bewust zijn.
Bij het gebruik van wiskundige toepassingen in het onderwijs dient onderscheiden te worden of het gaat om maatschappelijke toepassingen of om het gebruik van wiskunde in andere schoolvakken. In het laatste geval is sprake van een combinatie van lesprogramma's van verschillende vakken, hetgeen voor leerlingen tot verwarrende situaties kan leiden. Tijdens de werkgroep krijgen deelnemers de gelegenheid wiskunde-lesmateriaal (o.a. HEWET) met economie-materiaal te vergelijken, met als doel zich in te leven in de problemen die leerlingen daarbij kunnen ontmoeten.
Met elkaar zullen we trachten mogelijkheden te vinden om leerlingen te helpen bij het oplossen van die problemen.

3 *Rol van instapproblemen en conteksten bij het begrijpen en leren van wiskundige vaardigheden* (Harrie Broekman, Hans Pouw)
Instapproblemen kunnen dienen om de *interesse* van leerlingen op te wekken. Dat stelt bepaalde eisen aan dat probleem. Het probleem moet niet al te specifiek zijn qua interessegebied om zoveel mogelijk leerlingen te bereiken. Niet al te simplistisch, maar ook niet te ingewikkeld. Dat betekent, dat het probleem zonder hulpmiddelen niet eenvoudig moet kunnen worden opgelost, terwijl het probleem wel aanpakbaar is. Verder moet het probleem na de te behandelen vaardigheid wel of eenvoudiger oplosbaar zijn.
Instapproblemen kunnen ook functioneren als een soort *voorsorteerfase*. Hierbij moeten leerlingen de gelegenheid krijgen het probleem te verkennen en oplossingsstrategieën te bedenken. De aan te leren vaardigheid moet op een natuurlijke wijze uit die fase volgen. Hiervoor moeten de problemen aan andere eisen voldoen. Veel verschillende eenvoudige problemen, waarbij de doorsnede het probleemgebied zonder ruis duidelijk maakt en waarbij de vaardigheid die men wil oefenen de meest voor de hand liggende oplosmethode is. De keuze van de problemen moet zodanig zijn, dat voor iedere leerling er minstens een is die tot zijn of haar ervaringswereld hoort.
Beide methoden sluiten het consequent uitwerken van één voorbeeld van begin tot eind uit, immers daarbij geldt, dat niet voor elke leerling interesse gewekt wordt, en bij het voorsorteren te veel ruis blijft bestaan bij het herkennen van het probleem. Voorbeelden zullen tijdens de werkgroepbijeenkomsten met de deelnemers nader worden uitgewerkt aan de hand van een thema en de manier waarop dit op diverse manieren aan de orde kan komen.

4 *Voorbeelden* (Gerard Doevendans, Ton Vandenberg)
Tijdens ons onderwijs zijn wij vaak bezig met het geven en vragen van voorbeelden aan onze leerlingen. Hierbij merken we soms op dat sommige voorbeelden wel en andere niet werken. Dit wordt veroorzaakt door het gebruik van de voorbeelden in verschillende situaties.
In deze werkgroep willen we nagaan hoe de samenhang is tussen de verschillende situaties, de soorten voorbeelden en de rol van de leerkracht als kiezer van voorbeelden.

5 *Wagenschein* (Frans Bouman, Douwe Kok)
Binnen de vernieuwingsbeweging in het wiskundeonderwijs in Duitsland neemt Martin Wagenschein een aparte plaats in. Wagenscheins denkbeelden over het (wiskunde-)onderwijs kunnen getypeerd worden door de termen genetisch, socratisch en exemplarisch.
In de korte tijd, die ter beschikking staat willen we
- een inleiding geven in de ideeën van Wagenschein;
- door een concrete opdracht met de deelnemers nagaan welke mogelijkheden er zijn die ideeën in onze praktijk te brengen.

6 *Situatiebeschrijvingen in wiskundeteksten* (Hans Krabbendam)
Laten we er even vanuit gaan, dat we leerlingen een wiskundig begrip (zoals bijvoorbeeld lineaire vergelijkingen) willen bijbrengen. Een mogelijkheid om dit begrip meer inhoud te geven is om het begrip in te bedden in een reëel voorbeeld. Op die manier wordt de relatie gelegd met het dagelijks leven, waardoor uitdrukkingen als 'betekenis geven', 'motivatieverhogend' en 'wiskunde dient ergens voor' inhoud krijgen. Deze reële voorbeelden, *situatiebeschrijvingen* genaamd, kunnen verwerkt worden in leerlingenteksten. Met het gebruik van deze situatiebeschrijvingen in het wiskunde-onderwijs komen ook problemen, vragen mee, zoals:
- Betekent contextrijk onderwijs open, minder gestructureerd, onduidelijk onderwijs?
- Hoe maak je goede leerlingenteksten die bestaan uit situatiebeschrijvingen.
- Wat is de functie van relevante en irrelevante informatie?
Hoe haal je uiteindelijk de wiskunde eruit: na één voorbeeld of na een groot aantal voorbeelden? Het zal duidelijk zijn, dat het nog niet mogelijk is op al die vragen een duidelijk antwoord te geven. Wel moet goed duidelijk zijn waar we het over hebben.
In de werkgroep willen we aandacht besteden aan een aantal aspecten, niet om oplossingen te geven, maar als signalering van die aspecten, waarbij het met name gaat om teksten met één centrale probleemstelling, de mate van matematiseeractiviteiten en de gestructureerdheid van de tekst.
Er is een inleiding, een praktikum en een nabespreking.

7 *Metaforen en andere beeldspraak* (Joop van Dormolen)
Om iets nieuws te begrijpen doen we vaak een beroep op een voorbeeld in de vorm van beeldspraak, omdat daarbij begrippen aan de orde komen, die de leerling bekend zijn. Soms gebruiken we die beeldspraak bewust, soms zijn de woorden zo gebruikelijk, dat we ons niet realiseren, dat het in oorsprong

beeldspraak is (bijv. 'snijden', $1/m^2 = m^{-2}$, 'verschuiven', 'getallenlijn'). Een metafoor is een veel gebruikte vorm van beeldspraak. Ook leerlingen gebruiken, om zich verstaanbaar uit te drukken, metaforen die we als leraar dikwijls niet als zodanig onderkennen; soms zijn we verrast door de originaliteit van de metafoor.
In de werkgroep willen we het verschijnsel signaleren, de kracht en de zwakte ervan bespreken en onderzoeken wanneer we metaforen wel en wanneer beter niet kunnen gebruiken in het wiskunde-onderwijs.
Na een inleiding zal er vooral gediscussieerd worden, waarbij gehoopt en verwacht wordt, dat de deelnemers veel van hun eigen ervaringen en ideeën zullen inbrengen.

8 *Proefwerken en schoolonderzoek bij de HEWET* (Martin Kindt, Jan de Lange)
Veel leraren zijn tevreden over het nieuwe HEWET-programma, maar komen desondanks in de problemen, als zij passende proefwerken en opgaven voor het schoolonderzoek moeten maken. In de werkgroep wordt aandacht aan dit probleem gegeven.

# Mededelingen

## Conferenties wiskunde-didactiek

Het Landelijk Werkverband Nascholing Wiskunde (Lerarenopleidingen, Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, OW & OC en SLO) organiseert ook het komende schooljaar weer driedaagse didactiek-conferenties voor wiskundeleraren (zowel tweede- als eerstegraads):
- 16 t/m 18 januari 1986:
  Rekenen in het Voortgezet Onderwijs (E)
- 30 januari t/m 1 februari 1986:
  Zingeving van wiskunde-onderwijs (D)
- 6 t/m 8 maart 1986:
  Breuk in het breukenonderwijs? (F)
- 13 t/m 15 maart 1986:
  Rekening houden met individuele verschillen. (C)
  Plaats: conferentie-oord 'De Bosrand' te Ede.

C-conferentie

*Rekening houden met individuele verschillen*
In deze conferentie wordt getracht beter oog te krijgen voor verschillen tussen leerlingen en nagegaan hoe je als leraar beter met die verschillen rekening kunt houden.
Waar mogelijk wordt gewerkt met concreet materiaal en steeds zal gepoogd worden de dagelijkse schoolpraktijk in het vizier te houden, mede door gebruik van schoolboekteksten. Er wordt aandacht besteed aan diverse vormen van differentiatie in wiskunde-onderwijs. Over een aantal actuele projecten op dit gebied zal door direct betrokkenen informatie gegeven worden; ook zullen er leraren aanwezig zijn die zelf materiaal ontwikkeld hebben om dit met de deelnemers te bespreken.
Data: 13, 14 en 15 maart 1986

D-conferentie

*Zingeving van wiskunde-onderwijs*
Deze conferentie wil een hulp zijn bij de zingeving van de wiskunde op school. Centraal staan vragen als:
'Wat is de zin van wiskunde en wiskunde-onderwijs?'; 'Waar, wanneer en hoe kunnen leerlingen de zin van hun wiskunde-onderwijs ervaren?'
Dergelijke vragen komen naar voren tijdens het werken aan concrete probleemstellingen die alle direct van toepassing zijn op situaties in wiskundelessen, onder andere aan de hand van video-opnamen.
Eigen activiteit en creativiteit, bijvoorbeeld aan de hand van schoolboekteksten, wordt afgewisseld met informatieverstrekking en discussie. De bedoeling is dat de deelnemers naar huis gaan zowel met fundamentele vragen als met concrete ideeën om leerlingen beter de zin van de schoolwiskunde te kunnen laten inzien.
Date: 30 en 31 jan., 1 febr. 1986

E-conferentie

*Rekenen in het voortgezet onderwijs*
In een brugklas treft een wiskundeleraar zijn leerlingen aan met een grote diversiteit aan 'verleden' met betrekking tot het rekenonderwijs en in elk geval ook met een uiteenlopende vaardigheid in rekenen. Het omgaan met die verschillen is het thema van deze conferentie. We stellen ons ten doel dat de deelnemers de diverse methoden en niveaus van rekenen bij hun leerlingen gaan herkennen en beter kunnen inspelen op de verschillen in rekenvaardigheid.
Mogelijkheden om met die verschillen om te gaan zullen besproken worden, waarbij gebruik gemaakt wordt van diverse publikaties op het gebied van rekendidactiek en van de inbreng van PA-docenten, (voormalige) medewerkers van Wiskobas, (huidige) medewerkers van de SLO, en bij BOVO-projecten betrokken leraren.
Data: 16, 17 en 18 janjuri 1986

F-conferentie

*Breuk in het breukenonderwijs?*
In het voortgezet onderwijs blijken leraren veel geconfronteerd te worden met leerlingen die problemen hebben met opgaven waar breuken in voorkomen.
De eerste vraag die rijst is: Hoe hebben leerlingen leren werken met breuken. Pas als leraren in het voortgezet onderwijs iets weten over hoe 'breuken' geleerd worden, dan kunnen ze adequaat antwoord geven op de tweede vraag:
Hoe kan ik leerlingen met problemen bij breuken helpen?
Door aan deze twee vragen te werken, hopen we bij te dragen aan een doorgaande lijn in basis- en voortgezet onderwijs. Voor deze cursus nodigen we daarom eveneens leerkrachten uit de bovenbouw van het basisonderwijs van harte uit.
N.B. Deze F-conferentie en de E-conferentie 'Rekenen' zijn 'onafhankelijk' van elkaar.
Data: 6, 7 en 8 maart 1986

Aanmeldingsformulieren zijn reeds verzonden naar alle scholen.
Contactpersoon: L. Kuijk, Katholieke Lerarenopleiding Sittard, tel.: 04490-1 10 66.

## Boekbespreking

'Ik was wiskundeleraar', het nieuwe boek van Fred Goffree, uitgegeven door de SLO, i.s.m. de NVvW, is tegen de speciale prijs van ƒ15,– verkrijgbaar op de jaarvergadering 26 oktober 1985. Het kan ook besteld worden door overmaking van ƒ15,– op giro 143917 t.n.v. NVvW te Amsterdam onder vermelding van 1 exemplaar boek Goffree, Harrie Broekman las het:

## En ze blijven enthousiast, die vijf wiskunde-leraren

Een boek over prominente Nederlandse wiskundeleraren, geschreven door Fred Goffree, samen met deze prominenten, is niet een boek dat menigeen zomaar als ontspanning gaat lezen. Zo dacht ik er ook over. Maar ten onrechte.

Gelukkig heb ik positief gereageerd toen Felix Gaillard, namens het bestuur van de vereniging, mij vroeg er eens voor te gaan zitten. Dat ik daar geen spijt van heb komt niet alleen doordat ik, net als Fred Goffree, van mening ben dat het wiskunde-onderwijs gemaakt wordt door de leraar in de klas*. Ik ben daarom blij dat veel van de didaktische kennis en ervaring van tenminste déze wiskundeleraren met hun pensionering niet in het niet verdwijnt.

Nu gold dat eigenlijk toch al niet voor de kennis en ervaring van de prominenten Jan Karel Timmer, Johan H. Wansink, Pierre van Hiele, Piet Vredenduin en Kees van Baalen, want zij hebben veel van hun kennis en ervaring op schrift gesteld en via voordrachten en colleges voor a.s. wiskundeleraren doorgegeven. Maar niet eerder in de vorm van een levensverhaal, waarin zij aangeven wat hen dreef, wat voor hen het belangrijkste was en is in hun wiskunde-onderwijs. Een tweede reden waarom ik blij ben het boek gelezen te hebben zit hem in de manier waarop het boek is samengesteld uit vijf interviews. Door de wijze waarop vervolgens de interviews tot 'verhalen' bewerkt zijn had ik het gevoel met de vertellers aan tafel te zitten en kreeg ik zin om met ze te gaan praten, ze vragen te stellen.

De kracht van Fred Goffree is m.i. geweest dat hij zo veel gezwegen heeft, om de gedachtengangen niet te verstoren. Achteraf heeft hij een aantal van zijn vragen alsnog aan de vertellers gegeven om daarmee het geschrevene uit te breiden en/of te verduidelijken. Dit heeft geleid tot een zeer goed leesbaar geheel, waaruit veel te leren valt voor degene die wil leren over wiskunde-onderwijs.

Dat iedere lezer daarbij zijn persoonlijke keuzes maakt, maar ook kan maken, valt alleen maar toe te juichen. Enige hulp krijg je als lezer beslist door de manier waarop Fred Goffree voor ieder hoofdstuk iets vertelt over zijn voorbereiding op het te voeren gesprek. Ik kreeg daarbij het gevoel samen met hem op weg te zijn naar de prominenten om hen mijn vragen voor te leggen. Jammer was het alleen dat ik niet 'terug kan gaan' met de – bij elk volgend gesprek – nieuw opkomende vragen.

Ik geef u een paar voorbeelden van die momenten waarop ik dacht 'Daar zou ik op door willen gaan'.

Een eerste voorbeeld is de opmerking van Van Hiele (pag. 184) over het feit dat mevr. Ehrenfest niet altijd tevreden was over de manier waarop hij haar ideeën van haar overnam en gebruikte.

*'Maar mevrouw Ehrenfest was daar niet altijd tevreden mee. Ze vond dat ik er te veel mee ging spelen. Je moest je alleen maar met de kern bezighouden. Maar ik wilde spelen.'*

Wil hij zelf alleen maar spelen, of is hij van mening dat de kinderen (leerlingen) meer zouden mogen (moeten) spelen? Ook zou ik willen weten wat Van Hiele denkt over een van de vele voorbeelden die Timmer geeft (pag. 51).

*'In eerste klassen heb ik op de volgende manier met ze gespeeld. De getallen 3 en 7 kwamen elkaar tegen bij een wandeling in het Vondelpark. Ze besloten een club op te richten, met 3 als voorzitter en 7 als secretaris. Nu moesten ze leden winnen. Ze besloten ieder getal uit te nodigen, dat geschreven kon worden als $a + b$, waarbij $a$ en $b$ niet noodzakelijk verschillende getallen zijn, die reeds lid zijn.*
*Zo kwam 6 als eerste op de lijst en alle uitgenodigde getallen stemden toe. Hoe zag de ledenlijst er uit? Ze sloegen acht over. Waren er nog meer 'gaten' in die lijst? Zou 44 ooit uitgenodigd worden? Wie van jullie geeft het eerst antwoord daarop?'*

En wat zullen zij vinden van de voorbeelden van Kees van Baalen, zoals het vergelijken van prijzen voor 'uitgaan'?

Hoe zal Wansink reageren op de opmerking van Kees van Baalen op pag. 317:

*'Van Wansink had ik meegekregen dat ook de wiskunde zelf een inspiratiebron kan zijn voor de communicatie met kinderen. Maar we hadden het toen slechts over het bestaande programma. En daar hield voor mij de wereld op.'*

En dat vooral in vergelijking met zijn opmerkingen van nu (pag. 333).

*'Je zit er bij en probeert voortdurend in te schatten hoever je kunt gaan. Nee, je hoeft niet altijd het onderste uit de kan te halen. Ik zag dat die kinderen steeds meer konden, beter gezegd: steeds meer durfden. Gewoon ergens even een grafiekje van tekenen, of een schetsje maken, of iets grofweg schatten. Dat konden ze trouwens vaak beter dan ik.'*

Vredenduin zegt hier eigenlijk niet zo veel over, maar suggereert toch meer naar wiskunde-onderwijs te kijken vanuit een (streng) wiskundige kant, of verstopt hij de rest? (pag. 230)

*'Nou zie ik wiskunde niet als middel om te leren denken, begrijp me goed. Wiskunde is überhaupt van belang, maatschappelijk en wetenschappelijk. De wiskundeleraar is echter in de gelegenheid zijn leerlingen ook nog zuiver te leren denken. Voor de leerling is dat van veel belang: hij kan daar zijn leven lang profijt van hebben.'*

* *Zie ook Wansink's opmerking op pag. 152:*
*'De wijze van lesgeven hangt in de eerste plaats af van de persoonlijkheid van de docent, pas in de tweede plaats van de stof die hij onderwijst. Ik ben me ervan bewust dat ik hiermee een extreem standpunt inneem.'*

En op pag. 277 zijn (de?) didaktische wet:

*'als een leraar iets van wiskunde aan een klas wil uitleggen, moet hij zorgen dat hij het eerst zelf donders goed weet. En als hij het helemaal goed weet, dan moet hij het uiteraard niet zo uitleggen, want dat is te moeilijk voor de klas. Maar vanuit zijn inzicht is hij dan in staat de wiskunde voor de kinderen op verantwoorde wijze duidelijk te maken.'*

Een ander aspect van Vredenduin komt naar voren in zijn opmerkingen en anekdotes betreffende het (mondelinge) examen: (pag. 276)

*'Alles gebeurt nu zo objectief volgens de regels. Warme menselijkheid is niet meer mogelijk.'*

Maar gelukkig is er meer dan het examen en kan Wansink zeggen: (pag. 141)

*'Ik heb steeds het gevoel gehad dat we als leerling en docent niet tegenover elkaar stonden, maar naast elkaar ter bereiking van het gestelde doel, succes bij de studie op school.'*

Of de opmerkingen van Van Hiele op pag. 191:

*'En ook heb ik gezegd dat die persoonlijke relatie juist zo goed is om de leerling aan te moedigen. Laat ik hierover duidelijk zijn. Het boek is een hulpmiddel, leraar en leerlingen moeten samen aan de slag ermee, het gesprek is daarbij onontbeerlijk.'*

Hoe meer ik ging grasduinen in het boek hoe meer vragen naar verbanden er boven kwamen, maar dat niet alleen, ik voelde me ook klein worden. Wat hebben die mensen jarenlang hard gewerkt en wat zijn ze nog enthousiast.
Timmer met al zijn schitterende voorbeelden voor in de klas, zoals de molenwiekformule (ontbinding van $a^2 - b^2$), zijn structuurprincipe en zijn geest-en-stofprincipe. (pag. 31)

*'Als goederen per schip vervoerd worden, dan kan men eisen dat het kanaal recht, breed en diep is. Bij het overdragen van geestelijke bagage zijn de zintuigen van de leerling het toevoerkanaal. Hoe meer zintuigen, des te breder kanaal. Gehoor, gezicht, gevoel en motorische elementen (zelfwerkzaamheid) kunnen een rol spelen.'*

Wansink met zijn enorme geheugen: (pag. 116/117)

*'Ik vroeg op een avond aan mijn vader, tegen alle gewoonte in, enige uitleg over een rekenles die ik die dag niet al te best had begrepen. Meester Bennink had ons, leerlingen der hoogste klasse, blijkbaar iets van letterrekenen willen bijbrengen. En nu snapte ik niet, waarom hij de ene maal de getallen 'drie en vier' door '3 en 4' voorstelde en even later door 'a en b'. Achteraf beschouwd lijkt het me toe, dat het voor de onderwijzer uit het begin van deze eeuw een moeilijk didactisch probleem geweest kan zijn om zijn jeugdige leerlingen duidelijk te maken dat de letters a en b geen nieuwe symbolen waren voor bepaalde getallen, zoals 3 en 4, maar symbolen voor willekeurige elementen uit een nauwkeurig aan te geven getallenverzameling, wat een zee van problemen voor onderwijzer en klasse kan opleveren!'*

Van Hiele, die blijft proberen vat te krijgen op de 'kloven van onverstaanbaarheid' die in/door leerprocessen overbrugd dienen te worden. (pag. 217)

*'Ik wil liever over de toekomst praten.
Structuur, inzicht en een bepaalde opvatting over kennis hangen voor mij dus nauw samen, zoals je zag. Vandaar ook dat mijn laatste boek in het Engels de titel Structure and Insight heeft. Toch heb ik daarin nog niet alles van het begin af kunnen opbouwen, het geeft op enkele punten nog slechts beknopte uitwerkingen.'*

Vredenduin, die zo helder aangeeft wat voor hem 'ordeproblemen' veroorzaakte. Maar vooral ook zo duidelijk is over zijn stokpaardje, het correct leren denken. (pag. 228)

*'Maar als je op teveel slakken tegelijk zout legt, schiet je je doel voorbij. Je suggereert de leerling dan dat hij het toch nooit goed doet.'*

En zijn grote eerlijkheid en realiteitszin. (pag. 296)

*'Je denkt misschien dat je je leven zelf uitstippelt. Vergeet het maar. Het leven hangt van toevalligheden aan elkaar en die hebben soms beslissende invloed. Denk nog maar eens aan de manier waarop ik uit 104 sollicitanten gekozen werd en de baan in Arnhem kreeg. Toch niet omdat ik de beste van die 104 was.'*

Van Baalen met zijn zoeken naar de fundamenten voor een wiskunde-onderwijs, dat meer is dan 'even een wiskundig begrip aanbrengen, maar gewoon een doorgaan op hun verwondering en ermee verder spelen'. (pag. 307)
Of zoals hij het op pag. 305 zegt:

*'Door naar hen te kijken leerde ik evenwel zelf ook wiskunde zien in wat ze deden. Die wiskunde is, in zekere zin, al in de mensen aanwezig. Nee, ik ben geen aanhanger van de leer van Plato, dat de ideeën al voor de geboorte in de ziel aanwezig zijn. Maar ik denk wel dat er structurerende vermogens waarop wiskunde toch gebaseerd is, in de mensen aangeboren zijn.'*

Deze voorgaande zaken heb ik er uitgelicht, maar er staat veel meer in dit boek; uitspraken over leerplanveranderingen, leerboeken, examens, proefwerken, het wel/niet durven experimenteren, etc., etc.
Bedankt Fred Goffree, dat je dit bij elkaar hebt gebracht.

Een opmerking tot slot.
Ik heb begrepen dat er 1000 exemplaren gedrukt zijn. Als het aan mij ligt zal er snel een tweede druk nodig zijn.

Harrie Broekman

## Inhoud



## Adressen van auteurs

J. Breeman, de Genestetlaan 94,
2741 AG Waddinxveen

H. G. B. Broekman, PDI, RU Utrecht,
Heidelberglaan 2, 3584 CS Utrecht

D. P. M. Krins, Mekongdreef 7,
3564 SP Utrecht

W. J. Pelgrum, T.H. Twente, Toegepaste Onderwijskunde, postbus 217,
7500 AE Enschede

H. N. Schuring, van Heemstralaan 21,
6814 KB Arnhem

J. W. Solberg, Faunuslaan 11,
5631 KN Eindhoven

A. Verweij, Noord Rundersteeg 10,
2312 VN Leiden

P. G. J. Vredenduin, Dillenburg 148,
6865 HN Doorwerth

E. Warries, T.H. Twente, Toegepaste Onderwijskunde, postbus 217,
7500 AE Enschede

J. M. J. Weterings, Elzas 44, 3524 RX Utrecht